

Олимпиада «Высшая проба» по математике**9 класс, 2012 год**

Первая и пятая задачи — по 20 баллов, вторая и шестая — по 24 балла, третья и четвёртая — по 16 баллов. Для получения диплома нужно было набрать от 25 баллов.

1. Найдите все пары взаимно простых натуральных чисел a и b , такие, что $a^2 + 3b^2$ делится на $a + 3b$.
2. Найдите максимальное число частей, на которые могут разбить плоскость 10 острых углов.
3. Докажите, что все положительные корни многочлена

$$x(x+1)(x+2)(x+3) - 1$$

больше $1/8$.

4. Каждая из четырёх окружностей проходит через три вершины заданного параллелограмма с углом 45° и площадью 2. Найдите площадь четырёхугольника, образованного центрами окружностей.
5. При каких значениях b , $b \neq 3$, объединение парабол $y = x^2$ и $y = (b-3)x^2 + bx + 2b - 4$ имеет ось или центр симметрии?
6. На плоскости отмечены восемь точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Может ли быть так, что более одной пятой всех выпуклых четырёхугольников с вершинами в этих точках — параллелограммы?

Ответы

1. $(1, 1)$, $(3, 1)$, $(9, 1)$.

2. 191.

3.

4. 2.

5. 0, 2 или 4.

6. Да.