

# Московская устная математическая олимпиада

7 класс, 2023 год

## Первый тур

- 1. По кругу.** Петя расставил по кругу числа от 1 до 15 в некотором порядке и вычислил разность каждых двух соседних чисел (вычитая из большего числа меньшее). Может ли сумма всех полученных разностей равняться 24?
- 2. Многоугольник.** Внутри выпуклого многоугольника нашлась точка, которая до середины каждой стороны, кроме одной, удалена на половину этой стороны. Обязательно ли это верно и для оставшейся стороны?
- 3. Шахматный турнир.** В турнире участвовали десять шахматистов. Каждый сыграл с каждым два раза: один раз белыми и один раз чёрными, причём какую-то из этих партий выиграл, а другую проиграл (ничьих не было). Могло ли оказаться, что половину всех партий выиграли белые, а половину — чёрные?

## Второй тур

- 4. Простое число.** Найдите все тройки  $(a; b; c)$  натуральных чисел, для которых выполняется равенство  $\frac{a+b}{b+c} = \frac{a+c}{a+b}$ , если известно, что  $ab + bc + ca$  — простое число.
- 5. Равные куски.** Некоторые клетки доски размером  $7 \times 7$  покрашены в чёрный цвет, образуя чёрный многоугольник. Его разрезали по прямой, идущей по линии сетки. Мог ли он распасться на пять равных фигур?
- 6. Тёзки.** Ученики писали олимпиаду в двух залах. Ни в одном из залов не было трёх тёзок. У 100 учеников были два тёзки в другом зале. У 144 учеников было хотя бы по одному тёзке в каждом зале. У скольких учеников было ровно по одному тёзке в каждом зале? (*Напомним, что тёзками считаются люди с одинаковыми именами.*)

## Третий тур

- 7. Процесс.** На доске записаны числа 1000, 1001, ..., 2999. На каждом шаге разрешается стереть любые два числа  $a$  и  $b$  и заменить их на число, равное  $\frac{\min(a,b)}{2}$ . После 1999 таких операций на доске останется одно число. Докажите, что оно меньше 1.
- 8. Угол.** В выпуклом четырёхугольнике  $ABCD$  равны стороны  $AB$ ,  $BC$  и  $CD$ , а угол  $D$  равен сумме углов  $A$  и  $C$ . Чему равен угол  $DAC$ ?
- 9. Карточки.** На столе лежат 13 карточек рубашками вверх, на трёх из них записана цифра 1, на десяти записана цифра 0. За один вопрос можно узнать произведение чисел на любых трёх карточках. За какое наименьшее количество вопросов можно гарантированно найти хотя бы одну карточку, на которой записан 0?