

Московская устная математическая олимпиада

6 класс, 2022 год

Первый тур

1. В водоёмах некоторой страны водятся крокодилы и бегемоты. В 20% водоёмов с крокодилами есть и бегемоты, в 25% водоёмов с бегемотами есть и крокодилы. 20% водоёмов свободны от животных. Какой процент водоёмов страны составляют те, в которых есть и крокодилы, и бегемоты?
2. Клетчатый квадрат разбит по клеткам на несколько прямоугольников. Не все прямоугольники равны друг другу, но все имеют равный периметр. Найдите наименьший возможный размер квадрата.
3. Дана таблица размером 100×100 клеток. Петя выбирает строку и в каждую из её клеток ставит число 1. Затем Вася выбирает столбец и в каждую его свободную клетку ставит число -1 . Затем Петя выбирает другую строку и в каждую её свободную клетку ставит 1. И так далее, пока в таблице есть свободные клетки. Чему равна сумма чисел в таблице, заполненной таким образом?

Второй тур

4. На доске записаны числа 1 2 3 4 5 6 7 8 9. Поставьте между некоторыми из них знаки «+» и «−» так, чтобы значение получившегося выражения было равно 2022, используя наименьшее количество минусов.
5. Можно ли какой-нибудь клетчатый квадрат разрезать на трёхклеточные уголки и вертикальные доминошки так, чтобы фигурок каждого вида было поровну?
6. Дорожка в саду выложена в два ряда несколькими прямоугольными плитками. Ширина всех плиток одинаковая, а длина может различаться. Требуется раскрасить эти плитки так, чтобы плитки одного цвета не имели общих отрезков границы. Какого наименьшего числа цветов для этого хватит?

Третий тур

7. Для натуральных чисел a , b , c и d , среди которых нет одинаковых, выполняется равенство $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{b}{d} - \frac{a}{c}$. Докажите, что произведение чисел a , b , c и d является квадратом целого числа.
8. Имеется два набора полосок, в каждом из которых есть по одной полоске с размерами 1×1 , 1×2 , \dots , 1×10 . В первом наборе все полоски красные, а во втором — синие. Требуется, используя некоторые из этих полосок, сложить квадрат размером 10×10 так, что все красные полоски горизонтальные, а все синие — вертикальные. Сколькими способами это можно сделать?

9. У царя есть 12 различных украшений из чистого золота. Царь и ювелир знают, что украшения весят 28, 29, 30, ..., 39 граммов, но только ювелир помнит, какое украшение сколько весит. Царь не доверяет ювелиру и считает, что тот всё напутал. Сможет ли ювелир за два взвешивания на чашечных весах без гирь доказать царю, что выбранное им украшение действительно весит 39 граммов?