

Турнир городов

10–11 классы, весенний тур, сложный вариант, 2016/17 год

1. Дан треугольник и 10 прямых. Оказалось, что каждая прямая равноудалена от каких-то двух вершин треугольника. Докажите, что или две из этих прямых параллельны, или три из них пересекаются в одной точке.
2. Взяли несколько положительных чисел и построили по ним такую последовательность: a_1 — сумма исходных чисел, a_2 — сумма квадратов исходных чисел, a_3 — сумма кубов исходных чисел, и т. д.
 - а) Могло ли случиться, что до a_5 последовательность убывает ($a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > a_5$), а начиная с a_5 — возрастает ($a_5 < a_6 < a_7 < \dots$)?
 - б) А могло ли случиться наоборот: до a_5 последовательность возрастает, а начиная с a_5 — убывает?
3. Вася утверждает, что он разрезал выпуклый многогранник, у которого есть лишь треугольные и шестиугольные грани, на две части и склеил из этих частей куб. Могут ли слова Васи быть правдой?
4. Петя раскрасил каждую клетку квадрата 1000×1000 в один из 10 цветов. Также он придумал такой 10-клеточный многоугольник Φ , что при любом способе положить его по границам клеток на раскрашенный квадрат, все 10 накрытых им клеток будут разного цвета. Обязательно ли Φ — прямоугольник?
5. В треугольнике ABC с углом A , равным 45° , проведена медиана AM . Прямая b симметрична прямой AM относительно высоты BB_1 , а прямая c симметрична прямой AM относительно высоты CC_1 . Прямые b и c пересеклись в точке X . Докажите, что $AX = BC$.
6. При каких натуральных n для каждого целого $k \geq n$ найдётся кратное n число с суммой цифр k ?
7. В Чикаго живут 36 гангстеров, некоторые из которых враждуют между собой. Каждый гангстер состоит в нескольких бандах, причём нет двух банд с совпадающим составом. Оказалось, что гангстеры, состоящие в одной банде, не враждуют, но если гангстер не состоит в какой-то банде, то он враждует хотя бы с одним её участником. Какое наибольшее число банд могло быть в Чикаго?