

Турнир городов

10–11 классы, осенний тур, сложный вариант, 2015/16 год

1. Геометрическая прогрессия состоит из 37 натуральных чисел. Первый и последний члены прогрессии взаимно просты. Докажите, что 19-й член прогрессии является 18-й степенью натурального числа.

2. Дан клетчатый квадрат 10×10 . Внутри него провели 80 единичных отрезков по линиям сетки, которые разбили квадрат на 20 многоугольников равной площади. Докажите, что все эти многоугольники равны.

3. Все коэффициенты некоторого непостоянного многочлена целые и по модулю не превосходят 2015. Докажите, что любой положительный корень этого многочлена больше чем $1/2016$.

4. Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$. Продолжения его противоположных сторон пересекаются в точках P и Q . Пусть K и N — середины диагоналей. Докажите, что сумма углов PKQ и PNQ равна 180° .

5. Петя увидел на доске несколько различных чисел и решил составить выражение, среди значений которого все эти числа есть, а других нет. Составляя выражение, Петя может использовать какие угодно числа, особый знак « \pm », а также обычные знаки « $+$ », « $-$ », « \times » и скобки. Значения составленного выражения он вычисляет, выбирая для каждого знака « \pm » либо « $+$ », либо « $-$ » во всех возможных комбинациях. Например, если на доске были числа 4 и 6, подойдёт выражение 5 ± 1 , а если на доске были числа 1, 2 и 3, то подойдёт выражение $(2 \pm 0,5) \pm 0,5$. Возможно ли составить необходимое выражение, если на доске были написаны

а) числа 1, 2, 4;

б) любые 100 различных действительных чисел?

Да (a); Нет (б)

6. Арбуз имеет форму шара диаметра 20 см. Вася сделал длинным ножом три взаимно перпендикулярных плоских надреза глубиной h (надрез — это сегмент круга, h — высота сегмента, плоскости надрезов попарно перпендикулярны). Обязательно ли при этом арбуз разделится хотя бы на два куска, если

а) $h = 17$ см;

б) $h = 18$ см?

Да (a); Нет (б)

7. Шеренга состоит из N ребят попарно различного роста. Её разбили на наименьшее возможное количество групп стоящих подряд ребят, в каждой из которых ребята стоят по возрастанию роста слева направо (возможны группы из одного человека). Потом в каждой группе переставили ребят по убыванию роста слева направо. Докажите, что после $N - 1$ такой операции ребята будут стоять по убыванию роста слева направо.