

## Турнир городов

8–9 классы, осенний тур, базовый вариант, 2014/15 год

1. Есть 99 палочек с длинами  $1, 2, 3, \dots, 99$ . Можно ли из них сложить контур какого-нибудь прямоугольника?
2. Существуют ли такие десять попарно различных натуральных чисел, что их среднее арифметическое больше их наибольшего общего делителя
  - а) ровно в шесть раз;
  - б) ровно в пять раз?
3. На стороне  $AB$  квадрата  $ABCD$  отмечена точка  $K$ , а на стороне  $BC$  — точка  $L$  так, что  $KB = LC$ . Отрезки  $AL$  и  $CK$  пересекаются в точке  $P$ . Докажите, что отрезки  $DP$  и  $KL$  перпендикулярны.
4. С начала учебного года Андрей записывал свои оценки по математике. Получая очередную оценку (2, 3, 4 или 5), он называл её *неожиданной*, если до этого момента она встречалась реже каждой из всех остальных возможных оценок. (Например, если бы он получил с начала года подряд оценки 3, 4, 2, 5, 5, 5, 2, 3, 4, 3, то неожиданными были бы первая пятёрка и вторая четвёрка.) За весь учебный год Андрей получил 40 оценок — по 10 пятёрок, четвёрок, троек и двоек (неизвестно, в каком порядке). Можно ли точно сказать, сколько оценок были для него неожиданными?
5. Даны  $N$  прямоугольных треугольников. У каждого выбрали по одному катету и нашли сумму их длин, затем нашли сумму длин оставшихся катетов, и, наконец, нашли сумму длин всех гипотенуз. Оказалось, что три найденных числа являются длинами сторон некоторого прямоугольного треугольника. Докажите, что у всех исходных треугольников одно и то же отношение большего катета к меньшему, если
  - а)  $N = 2$ ;
  - б)  $N$  — любое натуральное число, большее 1.