

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике

9 класс, 2015 год

1. В ролевой игре «Worlds of MSU» имеются три класса: воин, маг, целитель. Каждый игрок может управлять персонажем некоторого класса (одиночный класс) или персонажем, совмещающим способности двух классов (двойной класс), например, маг-целитель. Партия из 32 игроков штурмует «Цитадель зла». Известно, что целителей (т. е. всех, имеющих способности целителей) в два раза больше магов и в k раз меньше, чем воинов (k — целое число, большее двух). Сколько игроков имеют одиночный класс, если известно, что игроков, имеющих двойной класс, на 2 больше, чем целителей?

26

2. В четырёхугольнике $ABCD$ известно, что $AB = BC$, $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$. Из вершины B опущен перпендикуляр BH на сторону AD . Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$, если известно, что $BH = h$.

24

3. Будем обозначать $\max(A, B, C)$ наибольшее из чисел A, B, C . Найдите наименьшее значение величины

$$\max(x^2 + |y|, (x + 2)^2 + |y|, x^2 + |y - 1|).$$

23

4. Число 2015 можно представить в виде суммы последовательных целых чисел различным образом, например $2015 = 1007 + 1008$ или $2015 = 401 + 402 + 403 + 404 + 405$. Сколькими способами это можно сделать?

91

5. Известно, что при некоторых натуральных a, b число $N = \frac{a^2 + b^2}{ab - 1}$ — тоже натуральное. Найдите все возможные значения N .

5

6. В треугольник ABC вписана окружность с центром O , к которой проведена касательная, пересекающая стороны AC и AB в точках M и N соответственно. Найдите угол A треугольника ABC , если $\angle MON = 26^\circ$.

1281

7. Найдите наименьшее значение функции

$$f(x, y) = \frac{2015(x + y)}{\sqrt{2015x^2 + 2015y^2}}$$

и укажите все пары (x, y) , при которых оно достигается.

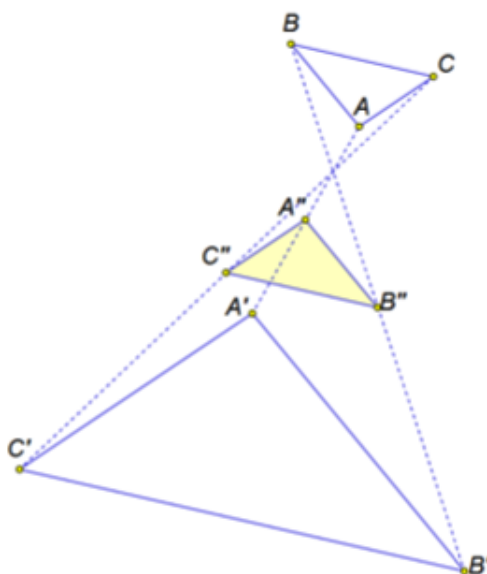
$$0 > n = x \text{ или } 0 \leq n < \sqrt{-}$$

8. Даны 2015 попарно взаимно простых натуральных чисел, не превосходящих 10^7 . Могут ли они все быть составными?

Нет

9. Даны треугольники ABC и $A'B'C'$, площади которых равны 1 и 2025 соответственно. Известно, что лучи AB и $A'B'$ параллельны и идут в противоположных направлениях (см. рисунок). То же верно и для пар BC и $B'C'$, CA и $C'A'$. Точки A'' , B'' и C'' — середины отрезков AA' , BB' и CC' . Найдите площадь треугольника $A''B''C''$.

484



10. Найдите функцию $f(x)$, о которой известно, что

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot f\left(\frac{2x+3}{x-2}\right) + 3 & \text{при } x \neq 2, \\ 0 & \text{при } x = 2. \end{cases}$$

$$\frac{(1+x+z^x)z}{(x-z)(1+x)z} = (x)f$$