

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике

10–11 классы, 2015 год, Ставрополь

1. Из четырёх бегунов — Антона, Бориса, Виктора и Григория — второе место занял самый старший. При этом Антон пробежал дистанцию быстрее, чем Виктор, а Григорий — быстрее, чем Борис и Виктор. Известно также, что Борис старше Антона, а Виктор старше Григория. В каком порядке финишировали спортсмены?

Григорий, Борис, Антон, Виктор

2. На доске написаны числа $1, 2, \dots, 2015$. Над ними последовательно проделывают 2014 операций, причём n -я по счёту операция состоит в следующем: произвольные числа a и b (из написанных на доске) стираются и дописывается одно число, равное ab/n . Что останется на доске в конце?

2015

3. В четырёхугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 2, BC = 4, CD = 5$ вписали окружность и вокруг него описали окружность. Найдите площадь четырёхугольника.

 $2\sqrt{30}$

4. Решите уравнение

$$\frac{\cos 4x - 6 \cos^2 2x + 8 \cos^2 x}{\sqrt{6x - x^2 - 5}} = 0.$$

 $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{4}$

5. При каждом значении a решите уравнение

$$|x - 1| + |x + 1| + |x - 2| + |x + 2| + |x - 3| + |x + 3| + \dots + |x - 2015| + |x + 2015| + \\ + 2x^2 + 2a^2 + 4030^2 - 8060x - 8060a = 4030x.$$

Если $a = 2015$, то $x = 2015$; если $a \neq 2015$, то решений нет