Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике

10–11 классы, 2015 год, Челябинск

1. Из пунктов A и B навстречу друг другу выехали одновременно два автобуса, которые встретились 2 февраля в 12:00. Найдите дату и время начала движения автобусов, если их скорости на всём пути постоянные, и один из них прибыл 3 февраля в 4:00 в пункт B, а другой прибыл 3 февраля в 13:00 в пункт A.

1 февраля в 16:00

2. Через точку, лежащую на оси цилиндра радиуса $\sqrt{3}$ и отстоящую от ближайшего к ней основания цилиндра на расстояние 1, проведена плоскость. Найдите объём меньшей части цилиндра, отсекаемой этой плоскостью, если угол между осью цилиндра и плоскостью равен 60°.

3π

3. Найдите решения неравенства

$$\sqrt{\sin x + \frac{1}{2}} > 2\sin x$$

на отрезке $\left[-\frac{1}{2}; \frac{8}{3}\right]$.

$\left[-\frac{1}{2}; \frac{\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6}; \frac{8}{3}\right]$

4. Найдите произведение корней уравнения

$$\log_{5+\sqrt{15}}(x^2 - 2x - 2) = \log_{5-\sqrt{15}}(12 + 2x - x^2).$$

$-7 - \sqrt{15}$

5. Найдите все значения a, при которых существует целое число n, удовлетворяющее уравнению

$$n^2 \cdot 3^a - 3^a - 16n = 9 \cdot 3^{-a} - 3^{2-a} \cdot n^2.$$

$a = 1$ или $a = \log_3 \frac{16 \pm 5\sqrt{7}}{3}$