

## Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике

10–11 классы, 2010 год, Омск

1. Бабушка читает незнакомую ей книгу из 970 страниц. Незнакомый текст она читает со скоростью 10 страниц в час, а прочитанный ранее — со скоростью 20 страниц в час. Пока книга не прочитана, бабушка читает её ежедневно по 5 часов с того места, где лежит закладка, и оставляет закладку там, где закончила чтение. В какой день недели бабушка прочтёт книгу до конца, если первые страницы она прочла в понедельник, а каждую ночь её внук переносит закладку на 20 страниц назад?

□

2. Найдите все  $x$  из отрезка  $[0; 2\pi]$ , для которых

$$\log_{\sin x} \cos x > \log_{\operatorname{ctg} x} \cos x.$$

$$\left(\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{1-\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$$

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2y + x + xy^2 + y + 5 = 0, \\ x + y + xy + 5 = 0. \end{cases}$$

$$\{(0; -5), (-5; 0), (2; -3), (-3; 2)\}$$

4. Вокруг четырёхугольника  $ABCD$  описана окружность с центром в точке  $O$ . Известно, что диагонали  $AC$  и  $BD$  четырёхугольника перпендикулярны,  $AB = 4$ ,  $DC = 5$ . Какие значения может принимать площадь треугольника  $AOB$ ?

□

5. Решите уравнение в целых числах:

$$\sqrt{9x^2 + 160x - 800} = 3x - y.$$

$$\{(369, -26), (86, -24), (9, -10), (30, -20), (6, -4), (-5, 0), (-198, -1060), (-85, -480), (-57, -310), (-33, -160), (-30, -140), (-22, -72)\}$$

6. При каких значения параметра  $a$  неравенство

$$\frac{1}{3\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{4-x}} + \left| \frac{1}{3\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{4-x}} \right| + a \leq 0$$

имеет единственное решение? Найдите это решение.

$$\frac{16}{25} - x - \frac{6}{5} = a$$