

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике
10–11 классы, 2014 год, Воронеж

1. Найдите все пары натуральных чисел x, y , удовлетворяющие уравнению

$$3xy - y + 3x = 1008.$$

2. В треугольнике ABC стороны AB и BC равны соответственно 3 и 1. Биссектриса BD равна $\sqrt{2}$. Найдите угол BAC .

3. Общий вес рюкзаков двух туристов за время похода уменьшился на $12\frac{1}{3}\%$. При этом вес рюкзака первого туриста уменьшился на 15% , а вес рюкзака второго — на 10% . Известно также, что в конце похода рюкзак второго туриста весил на 1,2 кг больше, чем рюкзак первого туриста в начале похода. Определите первоначальный вес рюкзаков каждого из туристов.

4. Решите неравенство

$$\log_{\frac{4-x^2}{3}} \frac{2}{3x^2+x} \geq -1.$$

5. Для каждого значения a решите уравнение

$$4 - \sin^2 x + \cos 4x + \cos 2x + 2 \sin 3x \sin 7x - \cos^2 7x - \cos^2 \pi a = 0.$$

Ответы

1. $(18, 18)$.
2. $\arccos \frac{5}{3\sqrt{3}}$.
3. 42 кг и 48 кг.
4. $(-2; -1) \cup (-1; -\frac{1}{3}) \cup (0; \frac{8}{11}] \cup (1; 2)$.
5. Если $a \in \mathbb{Z}$, то $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$; если $a \notin \mathbb{Z}$, то решений нет.