

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике

10–11 классы, 2014 год, Уфа

1. Решите неравенство

$$\sqrt{9-x} \cdot |x^2 - 1| \leq \sqrt{9-x} \cdot |x^2 - 10x + 13|.$$

2. Два брата родились в один день, но в разные годы. Оказалось, что в 2014 году каждому из них исполнилось столько лет, какова сумма цифр его года рождения. Определите год рождения каждого из братьев.

3. Решите уравнение

$$6 \cos 9x \cos 2x = 1 + 3 \cos 11x + 2 \cos^3 7x.$$

4. В треугольной пирамиде $SABC$ рёбра SA , SB и SC не длиннее, чем 3, 4 и 5 соответственно, а площади граней SAB , SAC и SBC не меньше, чем 6, $15/2$ и 10 соответственно. Найдите объём пирамиды $SABC$.

5. Найдите все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} y - a^2 + 5(a - 1) = (a^2 - 5a + 6)(x - 3)^6 + \sqrt{(x - 3)^2}, \\ x^2 + y^2 = 2(3x - 4) \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

Ответы

1. $(-\infty; \frac{7}{5}] \cup [2; 3] \cup \{9\}$.
2. 1988 и 2006.
3. $\frac{2\pi n}{7}, \pm \arccos \frac{\sqrt{3}-1}{14} + \frac{2\pi n}{7}, n \in \mathbb{Z}$.
4. 10.
5. $a = 1$ или $a = 4$.