

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике

10–11 классы, 2014 год, Саратов

1. Решите уравнение

$$\cos\left(11x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(17x + \frac{\pi}{4}\right).$$

2. Туристический автобус, вмещающий не более 50 человек, привёз группу школьников после экскурсии в кафе. Школьники расселись в кафе так, что за несколькими столами оказалось по три девочки и одному мальчику, за другими несколькими столами — по два мальчика и одной девочке, и ещё за одним столом оказались одна девочка и один мальчик. Какое максимальное количество школьников могло быть на экскурсии, если известно, что девочек в группе в полтора раза больше, чем мальчиков?

3. В четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность с центром O , при этом $\angle AOB = 75^\circ$, $AB = 3$. Найдите площадь круга, ограниченного описанной вокруг треугольника ABE окружностью, где E — точка пересечения прямых AD и BC .

4. Найдите все значения a , при которых уравнение

$$\log_2^2\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) + 2(a-1)\log_2\left(\frac{x}{1+x^2}\right) + a^2 - a - 2 = 0$$

имеет решение.

5. В правильном тетраэдре $ABCD$ проведено сечение так, что оно проходит через точки K , L , M , лежащие на рёбрах DC , DB , DA соответственно. При этом $DK : KC = 1 : 3$, $DL : LB = 2 : 1$, $DM : MA = 1 : 1$. Найдите угол между плоскостями грани ABC и построенного сечения.

Ответы

1. $\frac{\pi n}{14}, \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}.$

2. 45.

3. $9\pi.$

4. $[0; +\infty).$

5. $\arccos \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{131}}.$