

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике

10–11 классы, 2013 год, вариант 7

1. Выясните, какое из чисел больше:

$$\operatorname{arctg}(1 + \sqrt{2}) + \operatorname{arcctg}(1 - \sqrt{2}) \quad \text{или} \quad \frac{7\sqrt{3}}{4}.$$

2. Найдите все значения a , при каждом из которых для любого значения b система

$$\begin{cases} (x + 1)^2 + |y - 1| = 2, \\ y = b|2x + 1| + a \end{cases}$$

имеет решения.

3. В равнобедренном треугольнике ABC угол при вершине равен $2 \arccos \frac{3}{4}$. Окружность радиуса 4 с центром в середине основания AC пересекает прямую AB в точках K и L , а прямую BC в точках M и N , причём отрезки KM и LN пересекаются. Найдите радиус окружности, проходящей через точки B , L и N .

4. Решите уравнение

$$\log_3(x + 1) \cdot \log_3(2x - 1) \cdot (3 - \log_3(2x^2 + x - 1)) = 1.$$

5. Два равных конуса расположены так, что осью каждого из них является образующая другого. Углы при вершинах в осевых сечениях этих конусов равны по 60° . Найдите угол между двумя образующими, по которым пересекаются эти конусы.

Ответы

1. Первое больше.
2. $a \in \left[-\frac{3}{4}; \frac{11}{4}\right]$.
3. $\frac{8}{\sqrt{7}}$.
4. $x = 2$.
5. $2 \arcsin \sqrt{3\sqrt{3} - 5}$.