Объединённая межвузовская математическая олимпиада (ОММО)

11 класс, 2025 год

Задача 1. Можно ли расставить все натуральные числа от 1 до 2025 в ряд так, что для любого $k = 1, 2, \ldots, 2025$ сумма первых k чисел в этом ряду нацело делится на k-е число в ряду?

Задача 2. На окружности через равные промежутки отметили 400 точек и провели все возможные хорды между ними. Хорду с концами в отмеченных точках назовем «чётной», если на большей дуге, которую она стягивает, лежит чётное число точек. В противном случае хорда «нечётная». Рядом с каждой вершиной написано число. Сумма квадратов этих чисел равна 100. На каждой хорде написано произведение чисел, стоящих на её концах. Сумма чисел на «чётных» хордах равна a, сумма чисел на «нечётных» хордах равна b. Найдите наибольшее возможное значение величины $a - b$.

$\boxed{50}$

Задача 3. У Юры имеется сосуд, заполненный раствором кислоты в воде. Процентное содержание кислоты в растворе равно 59,04%. Юра несколько раз совершает следующую операцию. Юра выливает из сосуда $\dfrac{1}{4}$ всего раствора, а затем доливает в освободившееся место кислоту. Сколько раз Юра совершил эту операцию, если процентное содержание кислоты в растворе стало равным 92,71%?

$\boxed{9}$

Задача 4. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90^\circ$) медиана AM пересекает биссектрису BN в точке K. Известно, что $BK = 3$, $KN = 2$. Найдите площадь треугольника ABC.

$\boxed{\frac{75\sqrt{3}}{8}}$

Задача 5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{9}{y^2} + \dfrac{1}{z^2} = 9, \\ 4x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ 3\sqrt{3}x + y + \sqrt{3}z = 3. \end{cases}$$

$\boxed{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) \text{ или } \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)}$

Задача 6. Решите уравнение $(\sin x + 2)(\cos x + 2) = \dfrac{21}{8}$.

$\boxed{x = \frac{\pi}{4} + (2k-1)\pi \pm \arccos\frac{1}{2\sqrt{2}},\ k \in \mathbb{Z}}$

Задача 7. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$16^{2x} + 5 \cdot 16^x = a \cdot 16^x + 6$$

имеет хотя бы один корень на отрезке $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$.

$\boxed{a \in [4; 7{,}5]}$

Задача 8. Гора имеет форму конуса с вершиной в точке C. Точка O — центр основания, точка A лежит на основании конуса, а точка B — на отрезке CA, причем $CA = 60$, $AB = 10$, $OA = 20$. Железная дорога проложена по кратчайшему пути вокруг горы из точки A в точку B. Точка H — ближайшая к вершине горы из всех точек железной дороги. Найдите длину пути BH.

$\boxed{\frac{400}{\sqrt{91}}}$

Задача 9. График функции

$$y(x) = -x^4 + 10x^3 - 33x^2 + \frac{124}{3}x - 13$$

имеет две точки максимума и одну точку минимума. К графику провели касательную с двумя точками касания. Найдите длину отрезка касательной между точками касания.

$\boxed{5}$

Задача 10. В классе 24 ученика, у каждого ровно 3 друга среди одноклассников. Однажды на каникулах 6 учеников подписались на канал по олимпиадной математике. После этого ученики стали общаться между собой. Когда ученик узнаёт, что хотя бы двое из его друзей уже подписались на канал, он также подписывается на этот канал. Могло ли в итоге случиться, что весь класс подписался на канал?

$\boxed{\text{Нет}}$