Объединённая межвузовская математическая олимпиада (ОММО)

11 класс, 2022 год

Задача 1. Докажите, что для каждого натурального числа n число $5^{2n} + 3^{n+2} + 3^n$ делится на 11.

Задача 2. Группа авантюристов показывает свою добычу. Известно, что ровно у 13 авантюристов есть рубины; ровно у 9 — изумруды; ровно у 15 — сапфиры; ровно у 6 — бриллианты. Кроме того, что

- если у авантюриста есть сапфиры, то у него есть или изумруды, или бриллианты (но не то и другое одновременно);
- если у авантюриста есть изумруды, то у него есть или рубины, или сапфиры (но не то и другое одновременно).

Какое наименьшее количество авантюристов может быть в такой группе?

Задача 3. Бригада рабочих трудилась на заливке катка на большом и малом полях, причём площадь большого поля в 2 раза больше площади малого поля. В той части бригады, которая работала на большом поле, было на 4 рабочих больше, чем в той части, которая работала на малом поле. Когда заливка большого катка закончилась, часть бригады, которая была на малом поле, ещё работала. Какое наибольшее число рабочих могло быть в порядке?

$\boxed{10}$

Задача 4. Точка O является центром окружности, описанной около треугольника ABC со сторонами $BC = 8$ и $AC = 4$. Найдите длину стороны AB, если длина вектора $4\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - 3\overrightarrow{OC}$ равна 10.

$\boxed{5}$

Задача 5. Решите в действительных числах систему уравнений:

$$\begin{cases} a + c = 4; \\ ac + b + d = 6; \\ ad + bc = 5; \\ bd = 2. \end{cases}$$

$\boxed{(3, 2, 1, 1) \text{ и } (1, 1, 3, 2)}$

Задача 6. Решите уравнение $\arcsin \frac{x\sqrt{11}}{2\sqrt{21}} + \arcsin \frac{x\sqrt{11}}{4\sqrt{21}} = \arcsin \frac{5x\sqrt{11}}{8\sqrt{21}}$.

$\boxed{0, \pm\frac{21}{10}}$

Задача 7. При каких значениях параметра a уравнение

$$\log_2^2 x + (a-6)\log_2 x + 9 - 3a = 0$$

имеет ровно два корня, один из которых в четыре раза больше, чем другой?

$\boxed{-2,\ 2}$

Задача 8. В треугольнике ABC сторона $AC = 42$. Биссектриса CL делится точкой пересечения биссектрис треугольника в отношении $2:1$, считая от вершины. Найдите длину стороны AB, если радиус вписанной в треугольник ABC окружности равен 14.

$\boxed{56}$

Задача 9. Функция F определена на множестве троек целых чисел и принимает действительные значения. Известно, что для любых четырёх целых чисел a, b, c и n выполняются равенства $F(na, nb, nc) = n \cdot F(a, b, c)$, $F(a+n, b+n, c+n) = F(a, b, c) + n$, $F(a, b, c) = F(c, b, a)$. Найдите $F(58, 59, 60)$.

$\boxed{59}$

Задача 10. Пусть B — множество действительных чисел, не содержащее 0 и 1. Известно, что если $b \in B$, то $\frac{1}{b} \in B$ и $1 - \frac{1}{b} \in B$. Может ли в B быть ровно 1000 элементов?