

Объединённая межвузовская математическая олимпиада (ОММО)

11 класс, 2019 год

Задача 1. Что больше: 1 или $\frac{21}{64} + \frac{51}{154} + \frac{71}{214}$?

□

Задача 2. В футбольном турнире играли семь команд: каждая команда по одному разу сыграла с каждой. В следующий круг отбираются команды, набравшие тринадцать и более очков. За победу даётся 3 очка, за ничью — 1 очко, за поражение — 0 очков. Какое наибольшее количество команд может выйти в следующий круг?

Задача 3. При каком наименьшем натуральном k выражение $2017 \cdot 2018 \cdot 2019 \cdot 2020 + k$ является квадратом натурального числа?

Задача 4. Точка O лежит внутри равнобедренного прямоугольного треугольника ABC . Расстояние от неё до вершины A прямого угла равно 6, до вершины B равно 4, до вершины C равно 8. Найти площадь треугольника ABC .

□

Задача 5. Обозначим $f(x) = 9x^2 + 8x - 2$. Решите уравнение $f(f(x)) = x$.

□

Задача 6. Найдите все значения, которые может принимать выражение

$$3 \arcsin x - 2 \arccos y$$

при условии $x^2 + y^2 = 1$.

□

Задача 7. Дан треугольник ABC . На отрезках AB и BC выбраны точки X и Y соответственно так, что $AX = BY$. Оказалось, что точки A, X, Y и C лежат на одной окружности. Пусть BL — биссектриса треугольника ABC (L на отрезке AC). Докажите, что $XL \parallel BC$.

Задача 8. При каких значениях параметра a уравнение

$$\log_2 (2x^2 + (2a + 1)x - 2a) - 2 \log_4 (x^2 + 3ax + 2a^2) = 0$$

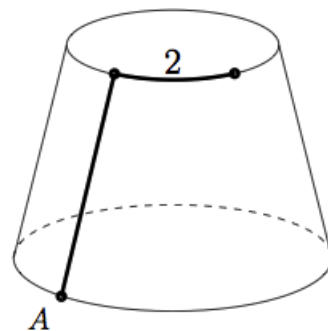
имеет два различных корня, сумма квадратов которых больше 4?

□

Задача 9. В школе имеется три кружка: по математике, по физике и по информатике. Директор как-то заметил, что среди участников кружка по математике ровно $1/6$ часть ходит ещё и на кружок по физике, а $1/8$ часть — на кружок по информатике; среди участников кружка по физике ровно $1/3$ часть ходит ещё и на кружок по математике, а ровно $1/5$ — на кружок по информатике; наконец, среди участников кружка по информатике ровно $1/7$ часть ходит на кружок по математике. А какая часть участников кружка по информатике ходит на кружок по физике?

$\frac{99}{7}$

Задача 10. Назовём *горой* усечённый прямой круговой конус с длиной окружности нижнего основания 8, а верхнего основания — 6. Склон горы наклонён под углом 60° к плоскости основания. На окружности нижнего основания лежит точка A . Турист начинает подъём по склону из точки A к ближайшей точке верхнего основания, а затем продолжает свой путь по краю верхнего основания, и проходит расстояние 2. После этого он возвращается в точку A кратчайшим маршрутом. Чему равна длина обратного пути?



$\frac{11}{\sqrt{3}}$