

# Объединённая межвузовская математическая олимпиада (ОММО)

11 класс, 2018 год

**Задача 1.** Докажите неравенство

$$\log_{2015} 2017 > \frac{\log_{2015} 1 + \log_{2015} 2 + \dots + \log_{2015} 2016}{2016}.$$

**Задача 2.**  $n$  грибников ходили в лес и принесли суммарно 200 грибов (возможно, некоторые из грибников не принесли домой ни одного гриба). Мальчик Петя, узнав об этом, заявил: «Какие-то двое из них обязательно принесли одинаковое количество грибов!» При каком наименьшем  $n$  мальчик Петя наверняка окажется прав? Не забудьте обосновать свой ответ.

12

**Задача 3.** Вася хочет найти все целые числа  $a$  такие, что выражение  $10n^3 - 3n^5 + 7an$  делится на 15 для всех целых  $n$ . Какие остатки может давать число  $a$  при делении на 15? Укажите все возможные ответы или докажите, что таких целых чисел  $a$  нет.

14 = a

**Задача 4.** В трапецию  $ABCD$  вписана окружность, касающаяся боковой стороны  $AD$  в точке  $K$ . Найдите площадь трапеции, если  $AK = 16$ ,  $DK = 4$  и  $CD = 6$ .

132

**Задача 5.** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 = (y - z)^2 - 3, \\ y^2 = (z - x)^2 - 7, \\ z^2 = (x - y)^2 + 21. \end{cases}$$

(1, 3, 5) (-1, -3, -5)

**Задача 6.** Изобразите (с обоснованием) на координатной плоскости  $Oxy$  множество решений неравенства

$$(y^2 - \arcsin^2(\sin x)) \left( y^2 - \arcsin^2 \left( \sin \left( x + \frac{\pi}{3} \right) \right) \right) \left( y^2 - \arcsin^2 \left( \sin \left( x - \frac{\pi}{3} \right) \right) \right) < 0.$$

**Задача 7.** Точки  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  — точки пересечения продолжений высот остроугольного треугольника  $ABC$  с описанной вокруг  $ABC$  окружностью. Окружность, вписанная в треугольник  $A_1B_1C_1$ , касается одной из сторон  $ABC$ , а один из углов треугольника  $ABC$  равен  $40^\circ$ . Найдите два других угла треугольника  $ABC$ .

08 и 09

**Задача 8.** При каких значениях параметра  $a$  уравнение

$$3^{x^2-2ax+a^2} = ax^2 - 2a^2x + a^3 + a^2 - 4a + 4$$

имеет ровно одно решение?

1 = v

**Задача 9.** В десятичной записи чётного числа  $M$  участвуют только цифры 0, 2, 4, 5, 7 и 9, цифры могут повторяться. Известно, что сумма цифр числа  $2M$  равняется 35, а сумма цифр числа  $M/2$  равняется 29. Какие значения может принимать сумма цифр числа  $M$ ? Укажите все возможные ответы.

1E

**Задача 10.** Точки  $M$ ,  $N$  и  $K$  расположены на боковых рёбрах  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольной призмы  $ABCA_1B_1C_1$  так, что  $AM : AA_1 = 1 : 2$ ,  $BN : BB_1 = 1 : 3$ ,  $CK : CC_1 = 1 : 4$ . Точка  $P$  принадлежит призме. Найдите наибольшее возможное значение объёма пирамиды  $MNKP$ , если объём призмы равен 16.

7