Московская математическая олимпиада

11 класс, 2025 год

Первый день

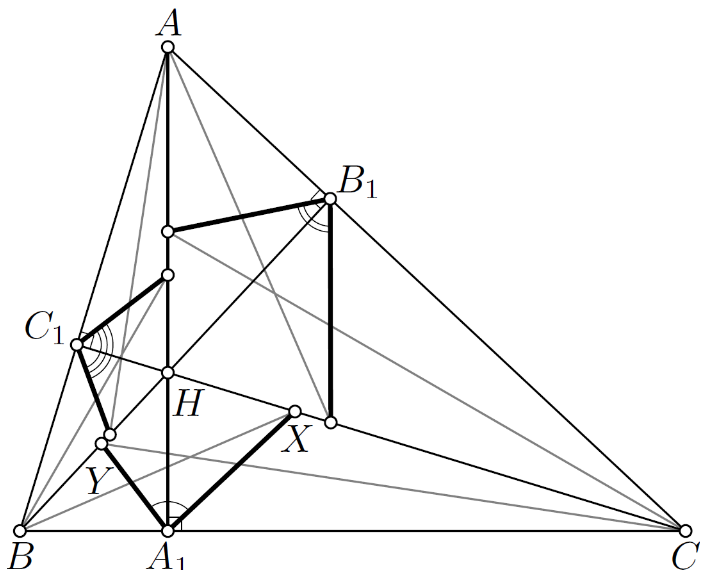
1. На совместный симпозиум лжецов (всегда лгут) и правдолюбов (всегда говорят правду) собрались 100 участников, среди которых не все лжецы и не все правдолюбы. Каждые два участника либо знакомы, либо незнакомы друг с другом. Каждый ответил «да» или «нет» на вопрос «Знакомы ли вы?» про каждого из остальных. Какое наименьшее количество ответов «да» могло быть получено?

2. Дана последовательность $a_n = n!\,(n^2 - 2025n + 1)$ для всех натуральных n. Найдите сумму первых 2025 членов этой последовательности.

3. Даны две треугольные пирамиды с общим основанием ABC. Их вершины S и R лежат по разные стороны от плоскости ABC. Все боковые рёбра одной пирамиды параллельны соответствующим боковым граням другой. Докажите, что объём одной пирамиды вдвое больше объёма другой.

4. Существуют ли такие натуральные числа m и n и такой многочлен $f(x)$ с целыми коэффициентами, что $f(m)$ не делится на n, но $f(p^k)$ делится на n для любого простого числа p и любого натурального k?

5. Высоты AA_1, BB_1, CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Биссектриса угла CBH пересекает отрезок CH в точке X, биссектриса угла BCH пересекает отрезок BH в точке Y. Обозначим величину угла XA_1Y через α. Аналогично определим β и γ. Найдите значение суммы $\alpha + \beta + \gamma$.



6. Петя красит каждую клетку доски 22×22 в чёрный или белый цвет так, чтобы клетки каждого цвета образовывали многоугольник. Затем Вася разрезает доску на двухклеточные доминошки. Петя стремится к тому, чтобы в итоге получилось как можно больше разноцветных доминошек, а Вася — к тому, чтобы их получилось как можно меньше. Наличие какого наибольшего числа разноцветных доминошек может гарантировать Петя, как бы ни действовал Вася? (Напомним, что граница многоугольника — замкнутая ломаная без самопересечений.)

Второй день

1. Между двумя восьмёрками в числе 88 вписали несколько нулей. Докажите, что можно всегда дописать слева в начало нового числа ещё несколько цифр так, чтобы получилось число, которое является полным кубом.

2. Кусок сыра массой 1 кг разрезали на $n \geqslant 4$ кусков массами меньше 600 г. Оказалось, что их нельзя разбить на две кучки так, чтобы масса каждой кучки была не меньше 400 г, но не больше 600 г (кучка может состоять из одного или нескольких кусков). Докажите, что найдутся три таких куска, что суммарная масса любых двух из них больше 600 г.

3. Пусть O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC. На стороне BC отметили точку D. Окружности, описанные около треугольников BOD и COD, повторно пересекают отрезки AB и AC в точках X и Y соответственно. Докажите, что из отрезков BX, XY и YC можно сложить треугольник.

4. Назовём подмножество A плоскости *похожим на прямую*, если для некоторой прямой ℓ той же плоскости найдётся такое взаимно однозначное соответствие $f : \ell \mapsto A$, что для всяких двух точек X, Y на прямой ℓ длина отрезка XY отличается от длины отрезка $f(X)f(Y)$ не более, чем на 1. Верно ли, что любое подмножество плоскости, похожее на прямую, лежит между некоторыми двумя параллельными прямыми?

Нет

5. Фокусник вместе со своим помощником собираются показать следующий фокус. Помощник надевает фокуснику повязку на глаза, приглашает на сцену случайного зрителя из зала и просит его написать последовательность из нулей и единиц длины 2^{2025}. Затем помощник верно называет фокуснику номер и значение некоторого одного члена последовательности. Задача фокусника — отгадать 2025 других членов последовательности (т. е. назвать их номера и значения). Докажите, что они могут заранее договориться так, чтобы фокус удался.