

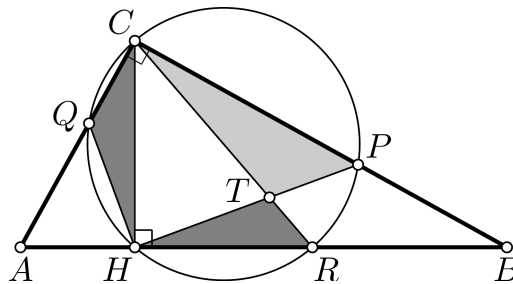
Московская математическая олимпиада

10 класс, 2025 год

1. Герцог Сумматор выбрал некоторые вещественные числа (хотя бы одно, но, возможно, бесконечное количество). То же самое сделал герцог Вычитатор. Оказалось, что если x является числом Сумматора, а y является числом Вычитатора, то $x + y$ является числом Сумматора, а $y - x$ является числом Вычитатора. Обязательно ли все числа Сумматора являются числами Вычитатора?

□

2. В треугольнике ABC с прямым углом C провели высоту CH . Окружность, проходящая через точки C и H , повторно пересекает отрезки AC , CB и BH в точках Q , P и R соответственно. Отрезки HP и CR пересекаются в точке T . Что больше: площадь треугольника CPT или сумма площадей треугольников CQH и HTR ?



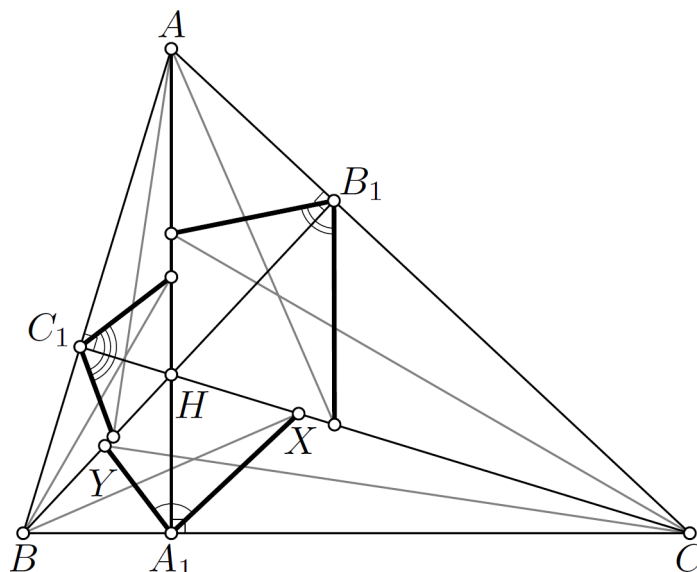
□

3. В Камелот съехались 100 рыцарей Круглого Стола, любые два из которых либо дружат, либо враждуют (дружба и вражда взаимны). Фея Моргана может выбрать любого рыцаря и сделать так, что он поссорится со всеми своими друзьями и при этом подружится со всеми своими врагами. Накладывать это заклинание Моргана может сколько угодно раз. Докажите, что она сможет добиться того, чтобы в итоге образовались такие две группы по 5 рыцарей, что каждый рыцарь из первой пятёрки будет враждовать с каждым рыцарем из второй.

4. Существуют ли такие натуральные числа m и n и такой многочлен $f(x)$ с целыми коэффициентами, что $f(m)$ не делится на n , но $f(p^k)$ делится на n для любого простого числа p и любого натурального k ?

□

5. Высоты AA_1 , BB_1 , CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H . Биссектриса угла CBH пересекает отрезок CH в точке X , биссектриса угла BCH пересекает отрезок BH в точке Y . Обозначим величину угла XA_1Y через α . Аналогично определим β и γ . Найдите значение суммы $\alpha + \beta + \gamma$.



270

6. Около таверны стоят 100 эльфов, 100 гномов и 100 орков. Сначала в неё заходят 10 эльфов, 10 гномов и 10 орков. Затем каждую минуту из неё выходит одно существо и тут же заходит другое, причём всегда после выхода эльфа заходит гном, после выхода гнома — орк, а после выхода орка — эльф. Могло ли оказаться так, что к какому-то моменту в таверне побывали все возможные компании из 30 существ ровно по одному разу? Все 300 существ различны.

Нет