Московская математическая олимпиада

8 класс, 2023 год

1. Даны три различных ненулевых числа. Петя и Вася составляют квадратные уравнения, подставляя эти числа в качестве коэффициентов, но каждый раз в новом порядке. Если у уравнения есть хотя бы один корень, то Петя получает фантик, а если ни одного, то фантик достаётся Васе. Первые три фантика достались Пете, а следующие два — Васе. Можно ли определить, кому достанется последний, шестой фантик?

2. На столе в ряд стоят 23 шкатулки, в одной из которых находится приз. На каждой шкатулке написано либо «Здесь приза нет», либо «Приз в соседней шкатулке». Известно, что ровно одно из этих утверждений правдиво. Что написано на средней шкатулке?

3. Докажите, что в прямоугольном треугольнике с углом 30 градусов одна биссектриса в два раза короче другой.

4. Назовём натуральное число хорошим, если в его десятичной записи есть только нули и единицы. Пусть произведение двух хороших чисел оказалось хорошим числом. Правда ли, что тогда сумма цифр произведения равна произведению сумм цифр сомножителей?

5. На сторонах равностороннего треугольника ABC построены во внешнюю сторону треугольники $AB'C$, $CA'B$, $BC'A$ так, что получился шестиугольник $AB'CA'BC'$, в котором каждый из углов $A'BC'$, $C'AB'$, $B'CA'$ больше 120 градусов, а для сторон выполняются равенства $AB' = AC'$, $BC' = BA'$, $CA' = CB'$. Докажите, что из отрезков AB', BC', CA' можно составить треугольник.

6. На каждую клетку доски 8×8 поставили по сторожу. Каждый сторож может смотреть в одном из четырёх направлений (вдоль линий доски) и сторожить всех сторожей на линии своего взгляда. Для какого наибольшего k можно так направить взгляды сторожей, чтобы каждого сторожа сторожили не менее k других сторожей?