Московская математическая олимпиада

9 класс, 2022 год

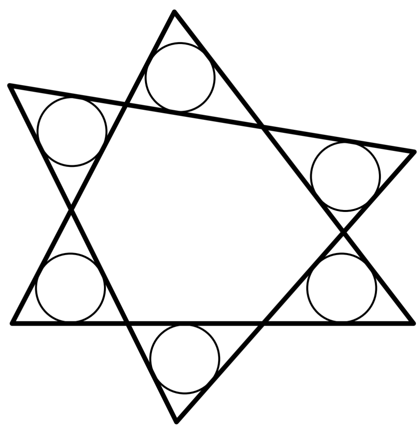
1. У каждого из девяти натуральных чисел n, $2n$, $3n$, $\ldots$, $9n$ выписали первую слева цифру. Может ли при некотором натуральном n среди девяти выписанных цифр быть не более четырёх различных?

2. Прямоугольники $ABCD$ и $DEFG$ расположены так, что точка D лежит на отрезке BF, а точки B, C, E, F лежат на одной окружности (см. рисунок). Докажите, что $\angle ACE = \angle CEG$.

3. Коллекция Саши состоит из монет и наклеек, причём монет меньше, чем наклеек, но хотя бы одна есть. Саша выбрал некоторое положительное число $t > 1$ (не обязательно целое). Если он увеличит количество монет в t раз, а количество наклеек оставит тем же, то в его коллекции будет 100 предметов. Если же вместо этого он увеличит количество наклеек в t раз, а количество монет оставит тем же, то у него будет 101 предмет. Сколько наклеек могло быть у Саши? Найдите все возможные ответы и докажите, что других нет.

4. Некоторые клетки доски 100×100 покрашены в чёрный цвет. Во всех строках и столбцах, где есть чёрные клетки, их количество нечётно. В каждой строке, где есть чёрные клетки, поставим красную фишку в среднюю по счёту чёрную клетку. В каждом столбце, где есть чёрные клетки, поставим синюю фишку в среднюю по счёту чёрную клетку. Оказалось, что все красные фишки стоят в разных столбцах, а синие фишки — в разных строках. Докажите, что найдётся клетка, в которой стоят и синяя, и красная фишки.

5. Два треугольника пересекаются по шестиугольнику, который отсекает от них 6 маленьких треугольников. Радиусы вписанных окружностей этих шести треугольников равны. Докажите, что радиусы вписанных окружностей двух исходных треугольников также равны.



6. Даны выпуклый многоугольник M и простое число p. Оказалось, что существует ровно p способов разбить M на равносторонние треугольники со стороной 1 и квадраты со стороной 1. Докажите, что длина одной из сторон многоугольника M равна $p - 1$.