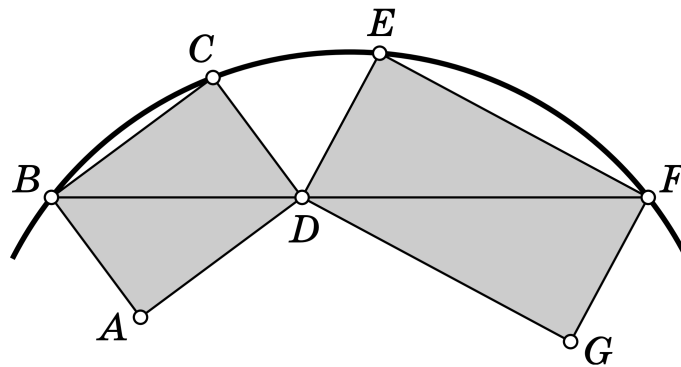


# Московская математическая олимпиада

9 класс, 2022 год

1. У каждого из девяти натуральных чисел  $n, 2n, 3n, \dots, 9n$  выписали первую слева цифру. Может ли при некотором натуральном  $n$  среди девяти выписанных цифр быть не более четырёх различных?

2. Прямоугольники  $ABCD$  и  $DEFG$  расположены так, что точка  $D$  лежит на отрезке  $BF$ , а точки  $B, C, E, F$  лежат на одной окружности (см. рисунок).

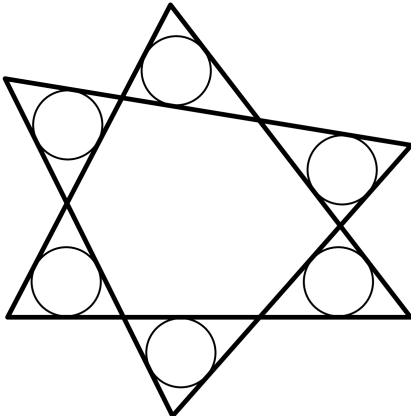


Докажите, что  $\angle ACE = \angle CEG$ .

3. Коллекция Саши состоит из монет и наклеек, причём монет меньше, чем наклеек, но хотя бы одна есть. Саша выбрал некоторое положительное число  $t > 1$  (не обязательно целое). Если он увеличит количество монет в  $t$  раз, а количество наклеек оставит тем же, то в его коллекции будет 100 предметов. Если же вместо этого он увеличит количество наклеек в  $t$  раз, а количество монет оставит тем же, то у него будет 101 предмет. Сколько наклеек могло быть у Саши? Найдите все возможные ответы и докажите, что других нет.

4. Некоторые клетки доски  $100 \times 100$  покрашены в чёрный цвет. Во всех строках и столбцах, где есть чёрные клетки, их количество нечётно. В каждой строке, где есть чёрные клетки, поставим красную фишку в среднюю по счёту чёрную клетку. В каждом столбце, где есть чёрные клетки, поставим синюю фишку в среднюю по счёту чёрную клетку. Оказалось, что все красные фишки стоят в разных столбцах, а синие фишки — в разных строках. Докажите, что найдётся клетка, в которой стоят и синяя, и красная фишки.

5. Два треугольника пересекаются по шестиугольнику, который отсекает от них 6 маленьких треугольничков. Радиусы вписанных окружностей этих шести треугольничков равны. Докажите, что радиусы вписанных окружностей двух исходных треугольников также равны.



6. Даны выпуклый многоугольник  $M$  и простое число  $p$ . Оказалось, что существует ровно  $p$  способов разбить  $M$  на равносторонние треугольники со стороной 1 и квадраты со стороной 1. Докажите, что длина одной из сторон многоугольника  $M$  равна  $p - 1$ .