

Московская математическая олимпиада

9 класс, 2020 год

1. Существует ли натуральное число, делящееся на 2020, в котором всех цифр 0, 1, 2, ..., 9 поровну?
2. Из шести палочек попарно различной длины сложены два треугольника (по три палочки в каждом). Всегда ли можно сложить из них один треугольник, стороны которого состоят из одной, двух и трех палочек соответственно?
3. Три богатыря сражаются со Змеем Горынычем. Илья Муромец каждым своим ударом отрубает половину всех голов и еще одну, Добрыня Никитич — треть всех голов и еще две, а Алёша Попович — четверть всех голов и еще три. Богатыри бьют по одному, в том порядке, в котором считают нужным. Если ни один богатырь не может ударить из-за того, что число голов получится нецелым, то Змей съедает богатырей. Смогут ли богатыри отрубить все головы 20^{20} -головому Змею?
4. В остроугольном треугольнике ABC ($AB < BC$) провели высоту BH . Точка P симметрична точке H относительно прямой, соединяющей середины сторон AC и BC . Докажите, что прямая BP содержит центр описанной окружности треугольника ABC .
5. К Ивану на день рождения пришли $3n$ гостей. У Ивана есть $3n$ цилиндров с написанными сверху буквами А, Б и В, по n штук каждого типа. Иван хочет устроить бал: надеть на гостей цилиндры и выстроить их в хороводы (один или больше) так, чтобы длина каждого хоровода делилась на 3, и при взгляде на любой хоровод сверху читалось бы по часовой стрелке АБ-ВАБВ... АБВ. Докажите, что Иван может устроить бал ровно $(3n)!$ различными способами. (Цилиндры с одинаковыми буквами неразличимы; все гости различны.)
6. Глеб задумал натуральные числа N и a , $a < N$. Число a он написал на доске. Затем он начал выполнять следующую операцию: делить N с остатком на последнее выписанное на доску число, а полученный остаток от деления также записывать на доску. Когда на доске появилось число 0, он остановился. Мог ли Глеб изначально выбрать такие N и a , чтобы сумма выписанных чисел была больше $100N$?