

Московская математическая олимпиада**10 класс, 2020 год**

1. Приведите пример такого квадратного трехчлена $P(x)$, что при любом x справедливо равенство

$$P(x) + P(x + 1) + \dots + P(x + 10) = x^2.$$

2. Среди зрителей кинофестиваля было поровну мужчин и женщин. Всем зрителям понравилось одинаковое количество фильмов. Каждый фильм понравился восьми зрителям. Докажите, что не менее $3/7$ фильмов обладают следующим свойством: среди зрителей, которым фильм понравился, не менее двух мужчин.

3. Существует ли вписанный в окружность 19-угольник, у которого нет одинаковых по длине сторон, а все углы выражаются целым числом градусов?

4. Точка O — центр описанной окружности треугольника ABC . Серединный перпендикуляр к BC пересекает AB и AC в точках X и Y . Прямая AO пересекает прямую BC в точке D , M — середина BC . Описанная окружность треугольника ADM пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке E , отличной от A . Докажите, что прямая OE касается описанной окружности треугольника AXY .

5. На доске написаны 1000 последовательных целых чисел. За ход можно разбить написанные числа на пары произвольным образом и каждую пару чисел заменить на их сумму и разность (не обязательно вычитать из большего меньшее, все замены происходят одновременно). Докажите, что на доске больше никогда не появятся 1000 последовательных целых чисел.

6. Для каких k можно закрасить на белой клетчатой плоскости несколько клеток (конечное число, большее нуля) в черный цвет так, чтобы на любой клетчатой вертикали, горизонтали и диагонали либо было ровно k черных клеток, либо вовсе не было черных клеток?