Московская математическая олимпиада

11 класс, 2019 год

Первый день

1. Пусть $f(x) = x^2 + 3x + 2$. Вычислите

$$\left(1 - \frac{2}{f(1)}\right)\left(1 - \frac{2}{f(2)}\right)\left(1 - \frac{2}{f(3)}\right)\ldots\left(1 - \frac{2}{f(2019)}\right).$$

$\boxed{\frac{337}{1010}}$

2. На экране компьютера напечатано натуральное число, делящееся на 7, а курсор находится в промежутке между некоторыми двумя его соседними цифрами. Докажите, что существует такая цифра, что, если её впечатать в этот промежуток любое число раз, то все получившиеся числа также будут делиться на 7.

3. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA' и BB'. Точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC. Докажите, что расстояние от точки A' до прямой BO равно расстоянию от точки B' до прямой AO.

4. Докажите, что для любых различных натуральных чисел m и n справедливо неравенство

$$\left|\sqrt[n]{m} - \sqrt[m]{n}\right| > \frac{1}{mn}.$$

5. Ортогональной проекцией тетраэдра на плоскость одной из его граней является трапеция площади 1. Может ли ортогональной проекцией этого тетраэдра на плоскость другой его грани быть квадрат площади 1?

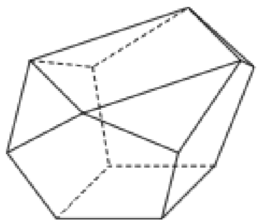
6. Рассмотрим на клетчатой плоскости такие ломаные с началом в точке $(0, 0)$ и вершинами в точках с целыми координатами, что каждое очередное звено идёт по сторонам клеток либо вверх, либо вправо. Каждой такой ломаной соответствует червяк — фигура, состоящая из клеток плоскости, имеющих хотя бы одну общую точку с этой ломаной. Докажите, что червяков, которых можно разбить на двуклеточные доминошки ровно $n > 2$ различными способами, столько же, сколько натуральных чисел, меньших n и взаимно простых с n. (Червяки разные, если состоят из разных наборов клеток.)

Второй день

1. Пользуясь равенством $\lg 11 = 1{,}0413\ldots$, найдите наименьшее число $n > 1$, для которого среди n-значных чисел нет ни одного, равного некоторой натуральной степени числа 11.

2. Существует ли такая гипербола, задаваемая уравнением вида $y = \frac{a}{x}$, что в первой координатной четверти ($x > 0$, $y > 0$) под ней лежат ровно 82 точки с целочисленными координатами?

3. У многогранника, изображенного на рисунке, грани — четыре правильных пятиугольника, четыре треугольника и два квадрата. Во сколько раз сторона верхнего квадрата больше стороны нижнего?



4. Докажите, что для любого натурального числа $n \geqslant 2$ и для любых действительных чисел a_1, a_2, $\ldots$, a_n, удовлетворяющих условию $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \neq 0$, уравнение

$$a_1(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_n)+a_2(x-a_1)(x-a_3)\ldots(x-a_n)+\ldots+a_n(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{n-1}) = 0$$

имеет хотя бы один действительный корень.

5. На доске написано несколько чисел. Разрешается стереть любые два числа a и b, а затем вместо одного из них написать число $\frac{a+b}{4}$. Какое наименьшее число может остаться на доске после 2018 таких операций, если изначально на ней написано 2019 единиц?