

**Московская математическая олимпиада****8 класс, 2018 год**

1. Существуют ли такие три попарно различных натуральных числа  $a$ ,  $b$  и  $c$ , что числа  $a + b + c$  и  $a \cdot b \cdot c$  являются квадратами некоторых натуральных чисел?
2. В строку выписано 39 чисел, не равных нулю. Сумма любых двух соседних чисел положительна, а сумма всех чисел отрицательна. Каким может быть знак произведения всех чисел? (Укажите все варианты и докажите, что других нет.)
3. Внутри параллелограмма  $ABCD$  отмечена точка  $K$ . Точка  $M$  — середина  $BC$ , точка  $P$  — середина  $KM$ . Докажите, что если  $\angle APB = \angle CPD = 90^\circ$ , то  $AK = DK$ .
4. Андрей Степанович каждый день выпивает столько капель валерьянки, сколько в этом месяце уже было солнечных дней (включая текущий день). Иван Петрович каждый пасмурный день выпивает количество капель валерьянки, равное номеру дня в месяце, а в солнечные дни не пьёт. Докажите, что если в апреле ровно половина дней будет пасмурные, а другая половина — солнечные, то Андрей Степанович и Иван Петрович выпьют за месяц поровну валерьянки.
5. В некотором государстве сложение и вычитание обозначаются знаками «!» и «?», но вам неизвестно, какой знак какой операции соответствует. Каждая операция применяется к двум числам, но про вычитание вам неизвестно, вычитается левое число из правого или правое из левого. К примеру, выражение  $a ? b$  обозначает одно из следующих:  $a - b$ ,  $b - a$  или  $a + b$ . Вам неизвестно, как записываются числа в этом государстве, но переменные  $a$ ,  $b$  и скобки есть и используются как обычно. Объясните, как с помощью них и знаков «!» и «?» записать выражение, которое гарантированно равно  $20a - 18b$ .
6. На сторонах выпуклого шестиугольника  $ABCDEF$  во внешнюю сторону построены равносторонние треугольники  $ABC_1$ ,  $B CD_1$ ,  $C DE_1$ ,  $DE F_1$ ,  $E FA_1$  и  $F AB_1$ . Оказалось, что треугольник  $B_1 D_1 F_1$  — равносторонний. Докажите, что треугольник  $A_1 C_1 E_1$  также равносторонний.