

Московская математическая олимпиада

10 класс, 2011 год

1. Существует ли арифметическая прогрессия из 2011 натуральных чисел, в которой количество чисел, делящихся на 8, меньше, чем количество чисел, делящихся на 9, а последнее, в свою очередь, меньше, чем количество чисел, делящихся на 10?
2. Доска 2010×2011 покрыта доминошками 2×1 ; некоторые из них лежат горизонтально, некоторые — вертикально. Докажите, что граница горизонтальных доминошек с вертикальными имеет чётную длину.
3. В треугольнике ABC проведены биссектрисы BB_1 и CC_1 . Известно, что центр описанной окружности треугольника BB_1C_1 лежит на прямой AC . Найдите угол C треугольника.
4. У Винтика и у Шпунтика есть по три палочки суммарной длины 1 метр у каждого. И Винтик, и Шпунтик могут сложить из трёх своих палочек треугольник. Ночью в их дом прокрался Незнайка, взял по одной палочке у Винтика и у Шпунтика и поменял их местами. Наутро оказалось, что Винтик не может сложить из своих палочек треугольник. Можно ли гарантировать, что Шпунтик из своих — сможет?
5. Куб разбит на прямоугольные параллелепипеды так, что для любых двух параллелепипедов их проекции на некоторую грань куба перекрываются (то есть пересекаются по фигуре ненулевой площади). Докажите, что для любых трёх параллелепипедов найдётся такая грань куба, что проекции каждых двух из них на эту грань не перекрываются.
6. Две фирмы по очереди нанимают программистов, среди которых есть 4 гения. Первого программиста каждая фирма выбирает произвольно, а каждый следующий должен быть знаком с кем-то из ранее нанятых данной фирмой. Если фирма не может нанять программиста по этим правилам, она прекращает приём, а другая может продолжать. Список программистов и их знакомств заранее известен. Могут ли знакомства быть устроены так, что фирма, вступающая в игру второй, сможет нанять по крайней мере 3 гениев, как бы ни действовала первая фирма?