

Механико-математический факультет МГУ

Письменный экзамен, 2009 год

Первая смена

1. Найти все значения переменной x , при которых все указанные функции

$$y = \sqrt{11 + 24x - 17x^2}, \quad y = \arccos(x^2 - 2x + 1), \quad y = \log_3(x^2)$$

имеют смысл и хотя бы одна из них обращается в нуль.

| |
|-------------------------------|
| $\frac{17}{131} \text{ и } 1$ |
|-------------------------------|

2. После рыбалки в ведре у Бориса (ведро у него вмещает не более 100 рыб) оказалось карасей на 25% меньше, чем у Андрея. Зато Андрей поймал других рыб на 25% меньше, чем Борис. Сколько всего рыб поймал Андрей, если известно, что это количество составляет 50% от общего количества пойманных Борисом и Андреем рыб?

| |
|----|
| 22 |
|----|

3. Окружность радиуса 2 с центром на основании равнобедренного треугольника касается его боковых сторон. Одну из точек касания соединили отрезком с противоположной вершиной основания. Этот отрезок делится высотой треугольника, проведенной к основанию, в отношении 4 : 3, считая от вершины. Найти площадь треугольника.

| |
|---------------|
| $\frac{8}{9}$ |
|---------------|

4. Найти все целые значения x из отрезка $[19; 29]$, удовлетворяющие неравенству

$$\frac{a^6 + 8a^5 - 2}{a^x} \leq 1,$$

где a — корень уравнения $y^{17} + 2y^{11} + 4y^5 = 1$.

| |
|--------------------|
| 19, 20, 21, 22, 23 |
|--------------------|

Вторая смена

5. Найти все значения аргумента x , при каждом из которых соответствующее значение функции

$$f(x) = \frac{2 \cos \frac{\pi(15+x)}{6} + 1}{\sqrt{14 + 5x - x^2}}$$

положительно.

(-2; 7) ∩ (1; 5)

6. В некоторой компании каждый сотрудник либо правдивец (всегда говорит правду), либо лжец (всегда лжет). Каждого из сотрудников спросили про каждого из остальных, правдивец тот или лжец. Всего было получено 32 ответа «правдивец» и 40 ответов «лжец». На сколько отличается в этой компании количество сотрудников-правдивцев от количества сотрудников-лжецов?

1

7. В треугольнике ABC сторона AB равна 38, а медиана CM наклонена к AB под углом 40° и равна 19. В этот треугольник вписана окружность. Найти периметр треугольника, вписанного в эту окружность и подобного треугольнику ABC .

38 \sin 40^\circ

8. При всех значениях параметра c решить систему

$$\begin{cases} \frac{9}{\sqrt{x+c}} + \frac{16}{\sqrt{y-c}} \leq 22 - \sqrt{x+c} - 4\sqrt{y-c}, \\ 2^{x-11} \cdot \log_2(4-y) = 1. \end{cases}$$

(1; 2) при $c = -2$; нет решений при $c \neq -2$