

Механико-математический факультет МГУ

Письменный экзамен, 2008 год

1. Решить неравенство

$$||1 - x^2| - |x^2 - 3x + 2|| \geq 3|x - 1|.$$

$$(\infty; 2] \cup \{1\} \cup [1; -\infty)$$

2. Игорь решал тригонометрическое уравнение и получил ответ

$$(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad \frac{4\pi}{3} \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \quad n, k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ в конце учебника выглядел иначе:

$$-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \quad \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}k, \quad n, k \in \mathbb{Z}.$$

Правильный ли ответ получил Игорь? Привести пример тригонометрического уравнения с ответом как в учебнике.

3. Решить систему

$$\begin{cases} \log_2(2x^3 + 4x^2y - 3x^2) = \log_{11}(4xy^2 + 24y^3 - 12y^2), \\ \log_{11}(x^3 + 6x^2y - 3x^2) = \log_2(8xy^2 + 16y^3 - 12y^2). \end{cases}$$

$$\left(\frac{2}{1}; 1\right)$$

4. Окружность радиуса 6 проходит через вершину B треугольника ABC и пересекает его стороны AB и BC в точках E и F соответственно. Центр O окружности лежит на стороне AC , $AO = 12$, $CO = 10$, $\angle OBC = \angle BCO + \angle EOA$. В каком отношении прямая BO делит отрезок EF ? Найти радиус окружности, описанной около треугольника ABC .

$$\frac{1}{2} (9 : 5 : 9) (6)$$

5. Найти все функции f , удовлетворяющие уравнению

$$f(x) + (x - 2)f(1) + 3f(0) = x^3 + 2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$1 + x - \varepsilon^x = (x)f$$

6. Через центр сферы проведены несколько плоскостей. Окружности, по которым эти плоскости пересекают сферу, пересекаются в 22 различных точках, причем в 12 из этих точек пересекаются по две окружности, а в остальных 10 точках — по три. Сколько плоскостей было проведено?

$$\angle$$