

Механико-математический факультет МГУ

Олимпиада «Абитуриент-2004», март

1. Найдите сумму тангенсов всех таких $x \in (-\pi; \pi)$, что

$$\sin 2x + 5 \cos 2x = 3.$$

2
1

2. Решите неравенство

$$3^{\log_x(3x^2+2x-1)} \leq (x^2+x)^{\log_x 9}.$$

(∞; 1) ∩ (1; 1 - 2/3]

3. Найдите все возможные значения суммы убывающей арифметической прогрессии

$$a_1 = \frac{6m - m^2 - 9}{6m - m^2}; \quad a_2 = \frac{6m - m^2 - 12}{6m - m^2}; \quad \dots; \quad a_n = \frac{-10}{6m - m^2},$$

где m — некоторое целое число.

7/11 - 5/12

4. В выпуклом четырехугольнике $KLMN$ диагонали KM и LN перпендикулярны соответственно сторонам MN и KL , а длина стороны KN равна $4\sqrt{3}$. На стороне KN расположена точка A так, что $\angle LAK = \angle MAN$. Известно, что $\angle MKN - \angle KNL = 15^\circ$. Найдите длину ломаной LAM и площадь четырехугольника $KLMN$, если $LA : AM = 1 : \sqrt{3}$.

(2/3 + 2/3) * (1 + 2/3) * 9/4

5. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$\operatorname{arctg}((3a - 1) \sin^2 x - (3a^3 - a^2 + 3a - 1) \sin x + \operatorname{tg}(ax - a\pi)) - ax + a\pi = 0$$

имеет ровно три решения.

(2/3; 2/3) ∩ (2/3; 2/3] ∩ [2/3; 2/3)

6. Дана сфера радиуса 1 с центром в точке O . Из точки A , лежащей вне сферы, проведены четыре луча. Первый луч пересекает поверхность сферы последовательно в точках B_1 и C_1 , второй — в точках B_2 и C_2 , третий — в точках B_3 и C_3 , четвертый — в точках B_4 и C_4 . Прямые B_1B_2 и C_1C_2 пересекаются в точке E , прямые B_3B_4 и C_3C_4 — в точке F . Найти объем пирамиды $OAEF$, если $AO = 2$, $EO = FO = 3$, а угол между гранями AOE и AOF равен 30° .

24
35