

Механико-математический факультет МГУ

Олимпиада «Абитуриент-2003», май

1. Решить неравенство

$$\frac{1}{|7 - \log_3 3x|} + \frac{1}{|4 - \log_9 9x^2|} \leq \frac{1}{|\log_9 81x|}.$$

$$\boxed{x \neq 1; x > 0}$$

2. Решить уравнение

$$\cos \frac{x}{2} \sqrt{5 \cos(2x - \pi) + 8 \sin \left(x + \frac{\pi}{2}\right)} - 5 + \sin \frac{x}{2} \sqrt{2 \cos x} = 0.$$

$$\boxed{\frac{x}{2} + \pi n, -\pi n + \frac{\pi}{2}, n, k \in \mathbb{Z}}$$

3. В треугольнике ABC с углом $\angle B = 50^\circ$ и стороной $BC = 3$ на высоте BH взята такая точка D , что $\angle ADC = 130^\circ$ и $AD = \sqrt{3}$. Найти угол между прямыми AD и BC , а также $\angle CBH$.

$$\boxed{20^\circ; 30^\circ}$$

4. Числа p и q подобраны так, что уравнение

$$2^{1+x} + p + q \cdot 2^{1-x} = 0$$

имеет ровно два различных корня, а их сумма равна 4. Найти произведение всех различных корней уравнения

$$(x^2 - 5x - 300)(x^2 - px - q) = 0.$$

$$\boxed{4800}$$

5. Пирамида $SABCD$ с боковыми ребрами $AS = BS = CS = 2$ вписана в сферу радиуса $\frac{5}{3}$. Линия пересечения плоскостей ASD и BSC касается сферы. Найти объем пирамиды, если $AB = BC = \frac{8}{5}$.

$$\boxed{\frac{96\sqrt{3}}{125}}$$

6. Найти все значения a , при каждом из которых неравенство

$$\log_x \frac{x-a}{1-ax} + \log_{x-1} \frac{x-a-1}{a+1-ax} \geq 0$$

имеет хотя бы три целочисленных решения.

$$\boxed{1 < a \leq 2}$$