

# Механико-математический факультет МГУ

## Олимпиада «Абитуриент-2003», март

1. Найти первый член целочисленной арифметической прогрессии, у которой сумма первых шести членов отличается от суммы следующих шести членов менее чем на 450, а сумма первых пяти членов превышает более чем на 5 сумму любого другого набора различных членов этой прогрессии.

54

2. Решить неравенство

$$\sqrt{\frac{4x^7 - 10x^3}{4x - x^3 - 3}} \leq x^3.$$

$$\sqrt[4]{\frac{2}{3}} \leq x \leq \sqrt[4]{\frac{2}{3}}, 0 = x$$

3. На продолжении биссектрисы  $AL$  треугольника  $ABC$  за точку  $A$  взята такая точка  $D$ , что  $AD = 10$  и  $\angle BDC = \angle BAL = 60^\circ$ . Найти площадь треугольника  $ABC$ . Какова наименьшая площадь треугольника  $BDC$  при данных условиях?

25√3; 75√3

4. Найти площадь фигуры, заданной на координатной плоскости системой

$$\begin{cases} |y + \log_2 x| + |y + 1 - 2^{x-1}| = |2y - 2^{x-1} + 1 + \log_2 x|, \\ |x| + |y + 1| + |y - 1| = x + 2. \end{cases}$$

2

5. Точка  $O$  расположена в сечении  $AA'C'C$  прямоугольного параллелепипеда  $ABCD A'B'C'D'$  с размером  $2 \times 6 \times 9$  так, что  $\angle OAB + \angle OAD + \angle OAA' = 180^\circ$ . Сфера с центром в точке  $O$  касается плоскостей  $A'B'C'$ ,  $AA'B$  и не имеет общих точек с плоскостью  $AA'D$ . Найти расстояние от точки  $O$  до этой плоскости.

3

6. Найти все значения  $\alpha$ , при каждом из которых расстояние между любыми двумя соседними корнями уравнения

$$\cos \alpha \cos 3x - \sin 3\alpha \cos x + 2 \sin 2\alpha \cos 2x = 3 \sin \alpha - \cos 3x$$

не превосходит  $\frac{\pi}{3}$

$$\mathbb{Z} \ni n, m$$