

## Механико-математический факультет МГУ

## Письменный экзамен, 2002 год (июль)

1. Решить неравенство

$$\log_{\frac{2}{3}} \frac{x}{x+1} + \log_{\frac{1}{2}} \frac{x+1}{3x} \geq 2.$$

[z:0]

2. Три сферы, радиусы которых соответственно равны  $\sqrt{6}$ , 1 и 1, попарно касаются друг друга. Через прямую, содержащую центры  $A$  и  $B$  второй и третьей сфер, проведена плоскость  $\gamma$  так, что центр  $O$  первой сферы удален от этой плоскости на расстояние 1. Найти угол между проекциями прямых  $OA$  и  $OB$  на плоскость  $\gamma$  и сравнить его с  $\arccos \frac{4}{5}$ .

$$\frac{\pi}{2} \wedge \text{сочле}$$

3. Из пункта  $A$  в пункт  $C$  выехал с постоянной скоростью велосипедист. За два километра до промежуточного пункта  $B$  он решил, что необходимо ехать быстрее, и увеличив скорость в пункте  $B$ , продолжил движение с постоянной скоростью вплоть до пункта  $C$ . Приехав в  $C$ , велосипедист обнаружил, что время движения с каждой из скоростей было прямо пропорционально соответствующей скорости и что на первые 18 км пути он затратил времени в полтора раза больше, чем на последние 18 км. Найти расстояние между пунктами  $A$  и  $B$ , если известно, что расстояние между  $A$  и  $C$  равно 75 км.

$$\frac{13}{100} \text{ км}$$

4. Во вписанном четырехугольнике  $ABCD$  точка  $X$  лежит на стороне  $AD$ , причем  $BX \parallel CD$  и  $CX \parallel BA$ . Найти  $BC$ , если  $AX = \frac{3}{2}$  и  $DX = 6$ .

[ε]

5. Найти все значения параметра  $a$ , при каждом из которых сумма арктангенсов корней уравнения  $x^2 + (1 - 2a)x + a - 4 = 0$  больше  $\frac{\pi}{4}$ .

[∞:z]

6. Найти минимальное значение выражения  $(x + y - z)^2$  при условии, что числа  $x$ ,  $y$  и  $z$  удовлетворяют одновременно каждому из неравенств

$$1 \leq (x + y)^2 \leq \frac{4}{3}, \quad 8 \leq (y + z)^2 \leq 9 \quad \text{и} \quad 10 \leq (z + x)^2 \leq 11.$$

$$\frac{11 \wedge - 8 \wedge + \varepsilon}{z} \frac{\pi}{1}$$