

Механико-математический факультет МГУ

Олимпиада «Абитуриент-2001», март

1. Решить уравнение

$$3x - 2|x - 2| = 3\sqrt{3x + 18} - 2 \left| \sqrt{3x + 18} - 2 \right|.$$

9

2. Решить неравенство

$$\frac{\log_{(21+4x-x^2)}(7-x)}{\log_{(x+3)}(21+4x-x^2)} < \frac{1}{4}.$$

$$\left(\sqrt{2+9\sqrt{2}+2} \right) \cap \left(\sqrt{9\sqrt{2}+2} \right) \cap \left(\sqrt{2-2} \right) \cap \left(\sqrt{-9\sqrt{2}-2} \right) \cap \left(\sqrt{9\sqrt{2}-2} \right) \cap \left(\sqrt{-2-2} \right)$$

3. В трапеции $ABCD$ с боковой стороной $CD = 30$ диагонали пересекаются в точке E , а углы AED и BCD равны. Окружность радиуса 17, проходящая через точки C , D и E , пересекает основание AD в точке F и касается прямой BF . Найти высоту трапеции и ее основания.

$$\frac{41}{96}; \frac{8}{25}; \frac{41}{60}$$

4. Можно ли подобрать числа A , B , φ , ψ так, чтобы выражение

$$\left(\sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right) + 2 \right)^2 + A \cos(x + \varphi) + B \sin(2x + \psi)$$

принимало при всех x одно и то же значение C ? Если да, то какие значения может принимать константа C ?

9

5. Основанием прямой призмы $ABCA'B'C'$ с высотой $\frac{4}{7}$ служит треугольник ABC , в котором $AB = BC = 1$ и $AC = \frac{3}{7}$. Через точку пересечения диагоналей грани $ACC'A'$ на расстоянии $\frac{4}{13}$ от точки A проводится плоскость, делящая объем призмы пополам. Какова наибольшая площадь сечения призмы такой плоскостью?

$$\sqrt[168]{\frac{5292}{169}}$$

6. Найти все значения a , при которых система

$$\begin{cases} (a-1)x^2 + 2ax + a + 4 \leq 0, \\ ax^2 + 2(a+1)x + a + 1 \geq 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

$$\frac{3}{4}; \frac{1}{3}$$