

# Механико-математический факультет МГУ

## Письменный экзамен, 2000 год (июль)

1. Решить неравенство

$$2\sqrt{5 \cdot 6^x - 2 \cdot 9^x - 3 \cdot 4^x} + 3^x < 2^{x+1}.$$

$$\left[1; \frac{5}{4}\right) \cup \left(\frac{3}{4}; 0\right]$$

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_2 xy \cdot \log_{4x} y = 2, \\ 8x - y = 1. \end{cases}$$

$$\left(\frac{8}{9}\right)$$

3. Длина дороги, соединяющей пункты  $A$  и  $B$ , равна 2 км. По этой дороге курсируют два автобуса. Достигнув пункта  $A$  или пункта  $B$ , каждый из автобусов немедленно разворачивается и следует без остановок к другому пункту. Первый автобус движется со скоростью 51 км/ч, а второй — со скоростью 42 км/ч. Сколько раз за время движения автобусы

а) встретятся в пункте  $B$ ;

б) окажутся в одном месте строго между пунктами  $A$  и  $B$ , если известно, что первый стартует из пункта  $A$ , а второй — из пункта  $B$ ?

$$761 \text{ (6; 9; 8)}$$

4. Две окружности касаются друг друга внешним образом в точке  $A$ . Прямая, проходящая через точку  $A$ , пересекает первую окружность в точке  $B$ , а вторую — в точке  $C$ . Касательная к первой окружности, проходящая через точку  $B$ , пересекает вторую окружность в точках  $D$  и  $E$  ( $D$  лежит между  $B$  и  $E$ ). Известно, что  $AB = 5$  и  $AC = 4$ . Найти длину отрезка  $CE$  и расстояние от точки  $A$  до центра окружности, касающейся отрезка  $AD$  и продолжений отрезков  $ED$  и  $EA$  за точки  $D$  и  $A$  соответственно.

$$7,9$$

5. Найти все  $a$ , при которых уравнение

$$(|a| - 1) \cos 2x + (1 - |a - 2|) \sin 2x + (1 - |2 - a|) \cos x + (1 - |a|) \sin x = 0$$

имеет нечетное число решений на интервале  $(-\pi; \pi)$ .

$$\{3\} \cap \{7; 1\} \cap \{1; 0\}$$

6. В основании четырехугольной пирамиды  $SABCD$  лежит параллелограмм  $ABCD$ . Известно, что плоскости треугольников  $ASC$  и  $BSD$  перпендикулярны друг другу. Найти площадь грани  $ASD$ , если площади граней  $ASB$ ,  $BSA$  и  $CSD$  равны соответственно 5, 6 и 7.

$$8\sqrt{2}$$