

Механико-математический факультет МГУ

Письменный экзамен, 2000 год (июль)

1. Решить неравенство

$$2\sqrt{5 \cdot 6^x - 2 \cdot 9^x - 3 \cdot 4^x} + 3^x < 2^{x+1}.$$

$$\left[1; \frac{3}{4}\right) \cup \left(\frac{3}{4}; 2\right]$$

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_2 xy \cdot \log_{4x} y = 2, \\ 8x - y = 1. \end{cases}$$

$$\left(\frac{1}{8}; \frac{8}{9}\right)$$

3. Длина дороги, соединяющей пункты A и B , равна 2 км. По этой дороге курсируют два автобуса. Достигнув пункта A или пункта B , каждый из автобусов немедленно разворачивается и следует без остановок к другому пункту. Первый автобус движется со скоростью 51 км/ч, а второй — со скоростью 42 км/ч. Сколько раз за время движения автобусы

а) встретятся в пункте B ;

б) окажутся в одном месте строго между пунктами A и B , если известно, что первый стартует из пункта A , а второй — из пункта B ?

$$761 \text{ (0; 9) (e)}$$

4. Две окружности касаются друг друга внешним образом в точке A . Прямая, проходящая через точку A , пересекает первую окружность в точке B , а вторую — в точке C . Касательная к первой окружности, проходящая через точку B , пересекает вторую окружность в точках D и E (D лежит между B и E). Известно, что $AB = 5$ и $AC = 4$. Найти длину отрезка CE и расстояние от точки A до центра окружности, касающейся отрезка AD и продолжений отрезков ED и EA за точки D и A соответственно.

$$7,9$$

5. Найти все a , при которых уравнение

$$(|a| - 1) \cos 2x + (1 - |a - 2|) \sin 2x + (1 - |2 - a|) \cos x + (1 - |a|) \sin x = 0$$

имеет нечетное число решений на интервале $(-\pi; \pi)$.

$$\{3\} \cap [2; 1) \cup (1; 0]$$

6. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит параллелограмм $ABCD$. Известно, что плоскости треугольников ASC и BSD перпендикулярны друг другу. Найти площадь грани ASD , если площади граней ASB , BSC и CSD равны соответственно 5, 6 и 7.

$$8\sqrt{2}$$