

Механико-математический факультет МГУ

Олимпиада «Абитуриент-1999», май

1. Решить уравнение

$$(x^2 + 4) \lg(\sin^2 3x) + x^2 \lg(\cos^2 2x) = 4 \lg(\cos 2x \sin^3 3x).$$

24

2. Сумма членов конечной геометрической прогрессии с первым членом 1 и положительным знаменателем равна $\frac{40}{27}$, а сумма тех же членов с чередующимися знаками (первый — со знаком «плюс», второй — со знаком «минус» и т. д.) равна $\frac{20}{27}$. Найти знаменатель прогрессии.

12

3. Найти все x , при которых хотя бы одно из двух выражений

$$|x - 3|(|x - 5| - |x - 3|) - 6x \quad \text{и} \quad |x|(|x| - |x - 8|) + 24$$

неположительно и при этом его модуль не меньше модуля другого.

12

4. Две окружности пересекаются в точках A и B . Через точку B проведена прямая, пересекающая окружности в точках C и D , лежащих по разные стороны от прямой AB . Касательные к этим окружностям в точках C и D пересекаются в точке E . Найти AE , если $AB = 10$, $AC = 16$, $AD = 15$.

24

5. Найти все значения a , при каждом из которых множество решений неравенства

$$\frac{a + 2 - 2^{x-2}}{a + 3} \geq \frac{5a + 5}{2(2^x + 3a + 3)}$$

содержит какой-либо луч на числовой прямой.

(∞+;3] ∩ {1-} ∩ (3-;∞-) ∋ v

6. Основанием пирамиды $SABCD$ является трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD такими, что $BC : AD = 2 : 5$. Диагонали трапеции пересекаются в точке E , а центр O вписанной в пирамиду сферы лежит на отрезке SE и делит его в отношении $SO : OE = 7 : 2$. Найти площадь полной поверхности пирамиды, если площадь боковой грани SBC равна 8.

12