

Олимпиада «Физтех» по математике

9 класс, 2018 год, вариант 1

1. Каких целых чисел от 1 до 60 000 (включительно) больше и на сколько: содержащих в своей записи только чётные цифры или содержащих в своей записи только нечётные цифры?

Вторых на 780

2. Даны две линейные функции $f(x)$ и $g(x)$ такие, что графики $y = f(x)$ и $y = g(x)$ — параллельные прямые, не параллельные осям координат. Найдите наименьшее значение функции $(g(x))^2 + f(x)$, если наименьшее значение функции $(f(x))^2 + g(x)$ равно -6 .

$\frac{7}{11}$

3. Уравнение $x^2 + ax + 6 = 0$ имеет два различных корня x_1 и x_2 ; при этом

$$x_1 - \frac{72}{25x_2^3} = x_2 - \frac{72}{25x_1^3}.$$

Найдите все возможные значения a .

67 = a

4. На каждой из прямых $y = 3$ и $y = 4$ отмечено по 73 точки с абсциссами $1, 2, 3, \dots, 73$. Сколькими способами можно выбрать три точки из отмеченных 146 так, чтобы они являлись вершинами прямоугольного треугольника?

10694

5. На продолжении стороны AC треугольника ABC за точку A отмечена точка T такая, что $\angle BAC = 2\angle BTC$. Найдите площадь треугольника ABC , если известно, что $AB = AC$, $BT = 70$, $AT = 37$.

420

6. Назовём *расстоянием* между числами модуль их разности. Известно, что сумма расстояний от шестнадцати последовательных *натуральных* чисел до некоторого числа a равна 276, а сумма расстояний от этих же шестнадцати чисел до некоторого числа b равна 748. Найдите все возможные значения a , если известно, что $a + b = 62,5$.

$\frac{4}{3} = a$

7. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Пусть P — центр окружности, вписанной в треугольник ABD , а Q — центр окружности, вписанной в треугольник CBD . Луч BP пересекает сторону DA в точке M , а луч DQ пересекает сторону BC в точке N . Оказалось, что $AM = \frac{9}{7}$, $DM = \frac{12}{7}$ и $BN = \frac{20}{9}$, $CN = \frac{25}{9}$.

а) Найдите отношение $AB : CD$.

б) Пусть дополнительно известно, что данные в условии окружности касаются. Найдите длины сторон AB и CD .

а) 3 : 5; б) 3, CD = 5