

Олимпиада «Физтех» по математике

11 класс, 2018 год, вариант 2

1. Найдите все значения x , при каждом из которых одно из трёх данных чисел

$$\log_x \left(x - \frac{13}{6} \right), \quad \log_{x-\frac{13}{6}}(x-3) \quad \text{и} \quad \log_{x-3}x$$

равно произведению двух остальных.

$$\frac{x}{x-1} = x, \quad \frac{x}{1} = x$$

2. Даны две линейные функции $f(x)$ и $g(x)$ такие, что графики $y = f(x)$ и $y = g(x)$ — параллельные прямые, не параллельные осям координат. Известно, что график функции $y = (f(x))^2$ касается графика функции $y = 4g(x)$. Найдите все значения A такие, что график функции $y = (g(x))^2$ касается графика функции $y = Af(x)$.

$$A = -1 \text{ или } 0 = A$$

3. Найдите количество различных приведённых квадратных трёхчленов (т. е. со старшим коэффициентом, равным 1) с целыми коэффициентами таких, что они имеют хотя бы один корень, все их корни являются степенями числа 7 с *целыми неотрицательными* показателями, и при этом их коэффициенты по модулю не превосходят 49^{68} .

$$4760$$

4. Числа x и y таковы, что выполняются равенства

$$\sin y + \cos x = \sin 3x \quad \text{и} \quad \sin 2y - \sin 2x = \cos 4x - \cos 2x.$$

Какое *наименьшее* значение может принимать сумма $\cos y + \sin x$?

$$-1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

5. Дан параллелограмм $ABCD$. Окружность Ω с диаметром 5 описана вокруг треугольника ABM , где M — точка пересечения диагоналей данного параллелограмма. Ω вторично пересекает луч CB и отрезок AD в точках E и K соответственно. Длина дуги AE в два раза больше длины дуги BM (дуги AE и BM не имеют общих точек). Длина отрезка MK равна 3. Найдите длины отрезков BC , BK и периметр треугольника EVM .

$$BC = 5, BK = \frac{5}{2}, P_{EVM} = \frac{5}{2}$$

6. Назовём *расстоянием* между числами модуль их разности. Известно, что сумма расстояний от восемнадцати последовательных *натуральных* чисел до некоторого числа a равна 1005, а сумма расстояний от этих же восемнадцати чисел до числа a^2 равна 865. Найдите все возможные значения a .

$$\frac{5}{2} = a$$

7. На ребре BC параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ выбрана точка M . Сфера, построенная на отрезке $C_1 M$ как на диаметре, касается плоскостей четырёх граней параллелепипеда, причём одной из них в точке, лежащей на ребре $B_1 B$. Известно, что $BM = 1$, $CM = 8$. Найдите длину ребра AA_1 , радиус сферы и объём параллелепипеда.

$$AA_1 = 10, R = 3, V = 162$$