

Олимпиада «Физтех» по математике

9 класс, 2017 год, вариант 2

1. Известно, что для трёх последовательных натуральных значений аргумента квадратичная функция $f(x)$ принимает значения 13, 13 и 35 соответственно. Найдите наименьшее возможное значение $f(x)$.

$\frac{7}{17}$

2. Решите неравенство

$$x^2 - 2x + 1 - |x^3 - 1| - 2(x^2 + x + 1)^2 \geq 0.$$

$[\frac{2}{1} - \{1-]$

3. В треугольник ABC вписаны два равных прямоугольника $PQRS$ и $P_1Q_1R_1S_1$ (при этом точки P и P_1 лежат на стороне AB , точки Q и Q_1 лежат на стороне BC , а точки R, S, R_1 и S_1 — на стороне AC). Известно, что $PS = 12$, $P_1S_1 = 3$. Найдите площадь треугольника ABC .

$\frac{2}{225}$

4. Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих равенству

$$x^2 + xy = 30000000.$$

257

5. Найдите количество пар целых чисел (a, b) таких, что $1 \leq a \leq 70$, $1 \leq b \leq 50$, и при этом площадь S фигуры, заданной системой неравенств

$$\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \geq 1, \\ x \leq a, \\ y \leq b, \end{cases}$$

такова, что число $2S$ кратно 5.

0971

6. В треугольнике ABC известно, что $AB = 3$, $AC = 4$, $\angle BAC = 60^\circ$. Продолжение биссектрисы AA_1 пересекает окружность, описанную около треугольника ABC , в точке A_2 . Найдите площади треугольников OA_2C и A_1A_2C (O — центр окружности, описанной около треугольника ABC).

$\frac{12}{13\sqrt{3}}$ и $\frac{12}{3\sqrt{3}}$
--

7. Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} 3|y| - 4|x| = 6, \\ x^2 + y^2 - 14y + 49 - a^2 = 0 \end{cases}$$

а) имеет ровно три решения; б) имеет ровно два решения.

$$\boxed{(6; 9) \cap \{8; 7\} \cap (9 - ; 6 -) (9 ; 6; 7 ; 9; 7) (8 ; 6; 7 ; 9; 7) (8 ; 6; 7 ; 9; 7)}$$