

## Олимпиада «Физтех» по математике

### 11 класс, 2017 год, вариант 1

1. Когда к квадратному трёхчлену  $f(x)$  прибавили  $x^2$ , его наименьшее значение увеличилось на 1, а когда из него вычли  $x^2$ , его наименьшее значение уменьшилось на 3. А как изменится наименьшее значение  $f(x)$ , если к нему прибавить  $2x^2$ ?

Увеличится на 3

2. Решите неравенство

$$x^{\log_3 x} - 2 \leq \left(\sqrt[3]{3}\right)^{\log^2_{\sqrt{3}} x} - 2 \cdot x^{\log_3 \sqrt[3]{x}}.$$

$(-\infty; \frac{1}{3}] \cup \{1\} \cup [\sqrt[3]{3}; +\infty)$

3. Известно, что числа  $x, y, z$  образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию с разностью  $\alpha = \arccos\left(-\frac{2}{5}\right)$ , а числа  $3 + \sin x, 3 + \sin y, 3 + \sin z$  образуют в указанном порядке непостоянную геометрическую прогрессию. Найдите  $\sin y$ .

$\frac{1}{5}$

4. В треугольнике  $ABC$  угол при вершине  $A$  в два раза больше угла при вершине  $C$ . Через вершину  $B$  проведена касательная  $\ell$  к окружности  $\Omega$ , описанной около треугольника  $ABC$ . Расстояния от точек  $A$  и  $C$  до этой касательной равны соответственно 4 и 9.

- а) Найдите расстояние от точки  $A$  до прямой  $BC$ .
- б) Найдите радиус окружности  $\Omega$  и длину стороны  $AB$ .

$\frac{1}{9}$  и  $\frac{1}{3}$  (в 9)

5. На координатной плоскости рассматриваются квадраты, все вершины которых имеют целые неотрицательные координаты, а центр находится в точке  $(60, 45)$ . Найдите количество таких квадратов.

2070

6. Найдите все значения параметра  $b$  такие, что система

$$\begin{cases} x \cos a + y \sin a - 2 \leq 0, \\ x^2 + y^2 + 6x - 2y - b^2 + 4b + 6 = 0 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение при любом значении параметра  $a$ .

$(-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$

7. Основание треугольной пирамиды  $ABCD$  — правильный треугольник  $ABC$ . Объем пирамиды равен  $\frac{25}{\sqrt{3}}$ , а её высота, проведённая из вершины  $D$ , равна 3. Точка  $M$  — середина ребра  $CD$ . Известно, что радиусы сфер, вписанных в пирамиды  $ABCM$  и  $ABDM$ , равны между собой.

- а) Найдите все возможные значения угла между гранями пирамиды при ребре  $AB$ .  
 б) Найдите все возможные значения длины ребра  $CD$ , если дополнительно известно, что грани  $BSC$  и  $ABC$  взаимно перпендикулярны.

$\frac{25}{\sqrt{3}} \text{ или } \frac{25}{\sqrt{3}} \wedge (9 : (\frac{25}{\sqrt{3}} \mp)) \text{ соотв. (в)}$
--