

## Олимпиада «Физтех» по математике

### 11 класс, 2016 год, вариант 3

1. Решите неравенство

$$(x^2 - 3x + 3)^{4x^3 + 5x^2} \leq (x^2 - 3x + 3)^{2x^3 + 18x}.$$

$$\{x\} \cap [1; 0] \cap \left(\frac{x}{6} - ; \infty\right)$$

2. Решите уравнение

$$\frac{\cos 5x - \cos 7x}{\sin 4x + \sin 2x} = 2|\sin 2x|.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, u \neq \pi + \left(\frac{\pi}{1 - \sqrt{17}}\right) \cos \pi x -$$

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2y + xy^2 - 2x - 2y + 10 = 0, \\ x^3y - xy^3 - 2x^2 + 2y^2 - 30 = 0. \end{cases}$$

$$\{-1, -4\}$$

4. В треугольнике  $ABC$  медианы  $BD$  и  $CE$  пересекаются в точке  $M$ . Окружность, построенная на отрезке  $BM$  как на диаметре, проходит через вершину  $C$  и касается прямой  $DE$ . Известно, что  $CM = 4$ . Найдите высоту  $AH$  треугольника  $ABC$ , угол  $CBD$  и площадь треугольника  $ABC$ .

$$12; 30^\circ; 24\sqrt{3}$$

5. В числе  $2*0*1*6*0*2*$  нужно заменить каждую из 6 звёздочек на любую из цифр 0, 2, 4, 5, 7, 9 (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 12-значное число делилось на 75. Сколькими способами это можно сделать?

$$2592$$

6. Дана система уравнений

$$\begin{cases} |15x| + |8y| + |120 - 15x - 8y| = 120, \\ \left(x - 4 \cos \frac{a\pi}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{15}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+2}{4}\right)^2. \end{cases}$$

а) Изобразите на плоскости  $(x, y)$  множество точек, удовлетворяющих первому уравнению системы, и найдите площадь полученной фигуры.

б) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система имеет ровно три решения.

$$[a) (9; 69 - 36; 22]$$

7. Высота правильной треугольной призмы  $ABCA_1B_1C_1$  равна 12. Сфера  $\Omega$  радиуса  $\sqrt{35/3}$  касается всех боковых граней призмы. На отрезках  $AA_1$  и  $BB_1$  выбраны соответственно точки  $K$  и  $L$  такие, что  $KL \parallel AB$ , а плоскости  $KBC$  и  $LA_1C_1$  касаются сферы  $\Omega$ . Найдите объем призмы и длину отрезка  $AK$ .

$$V = 420\sqrt{3}; AK = 8 \text{ или } AK = 4$$