

Олимпиада «Физтех» по математике

11 класс, 2015 год, вариант 1

1. Решите уравнение

$$\frac{|\sin x| - \sin 3x}{\cos x \cos 2x} = 2\sqrt{3}.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, u\sqrt{2} + \frac{9}{\pi} - u\sqrt{2} + \frac{9}{\sqrt{2}} \mp$$

2. Решите уравнение

$$\left(\frac{x}{243}\right)^{\log_2 \frac{9x}{4}} = \frac{729}{x^4}.$$

$$\frac{6}{1} \cdot \frac{7}{243}$$

3. Найдите количество натуральных чисел k , не превосходящих 445000 и таких, что $k^2 - 1$ делится нацело на 445.

$$4000$$

4. Решите систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1, \\ 16x^4 - 8x^2y^2 + y^4 - 40x^2 - 10y^2 + 25 = 0. \end{cases}$$

$$\left(\frac{9}{1} - \frac{9}{2}\right) \cdot \left(\frac{9}{1} - \frac{9}{2}\right) \cdot \left(\frac{9}{1} - \frac{9}{2}\right) \cdot \left(\frac{9}{1} - \frac{9}{2}\right)$$

5. На ребре BB_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ взята точка T такая, что $BT : B_1T = 2 : 5$. Точка T является вершиной прямого кругового конуса, такого, что три вершины призмы принадлежат окружности его основания.

а) Найдите отношение высоты призмы к ребру её основания

б) Пусть дополнительно известно, что $CC_1 = 7$. Найдите объём конуса.

$$\frac{28\sqrt{37}}{3500\pi} \left(9 \cdot \frac{3}{2}\right)^{\sqrt{2}} \text{ (в)}$$

6. Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся число b такое, что система

$$\begin{cases} x = |y + a| + \frac{4}{a}, \\ x^2 + y^2 + 24 + b(2y + b) = 10x \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение (x, y) .

$$(\infty + \frac{3}{2}] \cap (0; \infty -)$$

7. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O . Две окружности Ω_1 и Ω_2 равных радиусов с центрами O_1 и O_2 вписаны в углы ABC и ADC соответственно, при этом первая касается стороны BC в точке K , а вторая касается стороны AD в точке T .

а) Найдите радиус окружности Ω_1 , если $BK = 3\sqrt{3}$, $DT = \sqrt{3}$.

б) Пусть дополнительно известно, что точка O_1 является центром окружности, описанной около треугольника BOC . Найдите угол BDC .

008 (9) '8 (в)