

Олимпиада «Физтех» по математике

2010 год, вариант 1

1. В равнобедренном треугольнике ABC основание AC равно 1, угол ABC равен $2 \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$. Точка D лежит на стороне BC так, что площадь треугольника ABC вчетверо больше площади треугольника ADC . Найдите расстояние от точки D до прямой AB и радиус окружности, описанной около треугольника ADC .

$$\frac{2\sqrt{5}}{3}, \frac{2\sqrt{265}}{3}$$

2. Решите уравнение

$$\frac{\sin 3x \cos 5x - \sin 2x \cos 6x}{\cos x} = 0.$$

$$\mathbb{Z} \ni n, m, \frac{9}{x} \mp n, m$$

3. Решите неравенство

$$\sqrt{\frac{18-x}{2+x}} > -x.$$

$$[81; -)$$

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \log_x(y+1) = 4 \log_{x+2} \sqrt{y-1}, \\ \log_{y-1}(x+2) = \log_x \left(\frac{x^3}{y+1} \right). \end{cases}$$

$$\left(\frac{2}{21\sqrt{3}}, \frac{2}{21\sqrt{5}} \right), \left(\frac{2}{21\sqrt{2}}, \frac{2}{21\sqrt{11}} \right)$$

5. Найдите все значения параметра a , при которых система уравнений

$$\begin{cases} |x-1| + |x+1| - 2y = 0, \\ x^2 + y^2 - 2ay + 2a = 1 \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

$$[2\sqrt{2}$$

6. Основанием треугольной пирамиды $SABC$ является правильный треугольник ABC со стороной 5. Боковое ребро SC перпендикулярно основанию и имеет длину 15. Сфера, центр O которой лежит в плоскости SBC , касается рёбер SA , AB и AC в точках A_1 , B_1 и C_1 соответственно. Найдите AA_1 , расстояние от точки O до ребра BC и радиус сферы.

$$\frac{5}{6\sqrt{14}}, \frac{5}{81}, 9$$