

Олимпиада «Физтех» по математике

2014 год, вариант 1

1. Решите уравнение

$$\log_{x^2-2x} (2 - 3^{4x-x^2}) = \log_{6-x} (2 - 3^{4x-x^2}).$$

2. Решите уравнение

$$\frac{\cos x \cos (x + \frac{\pi}{6})}{6 \cos^2 x + 4 \sin^2 x - 5} + \frac{\cos x \sin (x + \frac{\pi}{3})}{5 - 4 \cos^2 x - 6 \sin^2 x} = -\frac{\sqrt{3} \operatorname{tg} 2x}{2}.$$

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 + 4xy = 2x + 4y + 3, \\ \sqrt{3x + 6y} + xy = 4. \end{cases}$$

4. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD . Окружность ω радиуса 2, центр O которой лежит на диагонали BD , касается отрезков BC , CD и AD в точках M , N и K соответственно. Известно, что $BM = 3$, а четырёхугольник $KOBA$ вписан в окружность Ω . Найдите угол COD , площадь трапеции $ABCD$ и радиус окружности Ω .

5. Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение $x^5 y^3 = 18^{50} \cdot 10^{33}$?6. Найдите все значения переменной x , при каждом из которых оба выражения

$$f(x) = \frac{3}{\sin^2 x} - 2\sqrt{3} \operatorname{ctg} x \quad \text{и} \quad g(x) = \frac{2x - 3}{\sqrt{9 + 8x - x^2}} + \frac{\sqrt{9 + 8x - x^2}}{2x - 3}$$

определены, причём значение меньшего из выражений не превосходит двух (если два числа равны, то меньшим считается любое из них).

7. Дана пирамида $ABCD$ и сфера радиуса $\sqrt{3}$. Ребро AC пирамиды является диаметром сферы; прямые, содержащие три других ребра, касаются сферы, а середины двух оставшихся рёбер лежат на сфере. Найдите угол ABC , длину ребра BD и объём пирамиды $ABCD$.

Ответы

1. $4, -2$.

2. $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

3. $(1, 1); (2; \frac{1}{2})$.

4. $90^\circ, 26, \frac{5\sqrt{13}}{6}$.

5. 126.

6. $(-1; 0) \cup (0; \frac{3}{2}) \cup \{4, \frac{4\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}\}$.

7. $45^\circ, 4\sqrt{3}, 6$.