

Олимпиада «Физтех» по математике

2013 год, вариант 2

1. Решите уравнение

$$\log_{6^{x-2}} x^2 + \log_{36^{x-2}} (x-5)^4 = \frac{2}{x-2}.$$

2. Решите уравнение

$$2\sqrt{7} \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{27 + \sin\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)}.$$

3. Решите неравенство

$$\left(\frac{6|x-2|}{x^2+21}\right)^{x+\sqrt{x^2-6}} > 1.$$

4. Число 58964 написали 8 раз подряд, при этом получилось 40-значное число

$$589645896458964589645896458964589645896458964.$$

Из этого 40-значного числа требуется вычеркнуть две цифры так, чтобы полученное после вычёркивания 38-значное число делилось на 6. Сколькими способами это можно сделать?

5. Дана прямоугольная трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD , причём $BC < AD$, $\angle BCD = 90^\circ$. Точка M — середина отрезка CD . Известно, что окружность радиуса 5 проходит через точки A и B и касается стороны CD в точке M , а $\cos \angle BMC = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. Найдите длины отрезков AB и BC , а также площадь трапеции.

6. При каких значениях параметра a существует единственная пара чисел (x, y) , удовлетворяющая системе неравенств

$$\begin{cases} (x^2 - xy + y^2)(|x - y| - 6) \geq 0, \\ x(x + 2) + y(y - 2) = a? \end{cases}$$

7. Правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ вписана в цилиндр (основания призмы вписаны в окружности оснований цилиндра). Плоскость α имеет ровно одну общую точку с каждым из оснований цилиндра и пересекает рёбра AA_1 , BB_1 и CC_1 в точках K , N , P соответственно. Найдите отношения $AK : KA_1$ и $CP : PC_1$, если $BN : NB_1 = 3 : 4$.

8. Дан правильный 16-угольник. Найдите количество четвёрок его вершин, являющихся вершинами выпуклого четырёхугольника, в котором хотя бы один угол равен 90° . (Две четвёрки вершин, отличающиеся порядком вершин, считаются одинаковыми.)

Ответы

1. 3; -1; 6.

2. $2\pi + 4\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

3. $(-\infty; -3) \cup (-3; -\sqrt{6}]$.

4. 247.

5. $AB = 10, BC = \frac{10}{9}, S = \frac{200\sqrt{2}}{9}$.

6. $a = 0, a = 6$.

7. $AK : KA_1 = 3 : 25, CP : PC_1 = 27 : 1$ или $AK : KA_1 = 27 : 1, CP : PC_1 = 3 : 25$.

8. 364.