

Олимпиада «Физтех» по математике

9 класс, онлайн-этап, 2017/18 год

1. Прямая пересекает график функции $y = x^2$ в двух точках с абсциссами x_1 и x_2 , а ось абсцисс — в точке с абсциссой x_3 . Какое **наибольшее** целое значение может принимать x_3 , если выполняется равенство $x_1 \cdot x_2 = 573$?

11

2. Вычислите значение выражения

$$\left(1 + \frac{1}{14^2 - 1}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{15^2 - 1}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{16^2 - 1}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{1}{300^2 - 1}\right)$$

(ответ округлите до тысячных).

1.071

3. Найдите **наименьшее** натуральное x , при котором из того, что $11m + 3n$ делится на 23, следует, что $17m + xn$ также делится на 23 (m и n — натуральные).

13

4. Найдите количество целочисленных решений $(a; b; c)$ уравнения $27^a \cdot 75^b \cdot 5^c = 1875$, удовлетворяющих условию $|a + b + c| \leq 111$.

99

5. Известно, что $\frac{a}{b+c-3a} = \frac{b}{a+c-3b} = \frac{c}{a+b-3c}$. Найдите все возможные различные значения выражения $\frac{3b}{a} + \frac{3c}{a} + \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$. В ответ запишите сумму найденных значений.

4

6. Известно, что для всех пар чисел $(x; y)$, для которых выполняются равенство $x + y = 3$ и неравенство $x^2 + y^2 > 14$, выполняется и неравенство $x^3 + y^3 > m$. Какое наибольшее значение может принимать m ?

49.5

7. Окружность, проходящая через вершины A и C треугольника ABC , пересекает стороны AB и CB в точках Q и P соответственно. Биссектриса угла ABC пересекает отрезок AP в точке E и отрезок CQ — в точке F . Найдите отношение $AE : CF$, если $QF = 4$, $PE = 5$.

1.25

8. В остроугольном треугольнике ABC провели высоту BH . Пусть M — середина отрезка BH . Точку M отразили симметрично относительно сторон AB и CB , получив точки K и L соответственно. Радиус окружности, описанной около треугольника KLM , равен $13\sqrt{3}$. Какое **наибольшее** значение может принимать длина отрезка KH , если угол BAC равен 60° ?

69

9. В футбольном турнире, проходящем в один круг (каждая команда должна сыграть с каждой ровно по одному разу), играют 30 команд. В некоторый момент турнира тренер команды A заметил, что любые две команды, отличные от A , сыграли разное количество игр. Какое **наибольшее** количество игр к этому моменту могла сыграть команда A ?

15

10. В королевстве 29 городов. Некоторые из них соединены прямыми авиарейсами. Известно, что если между городами A и B есть прямой авиарейс, и между городами B и C есть прямой авиарейс, то между городами A и C нет прямого авиарейса. Какое **наибольшее** количество прямых авиарейсов может быть в королевстве?

012