

Олимпиада «Физтех» по математике

11 класс, онлайн-этап, 2014/15 год

1. Какую наименьшую сумму могут иметь семь последовательных натуральных чисел, если эта сумма оканчивается на 1234567?

31234567

2. Петя и четыре его одноклассника стартовали одновременно в забеге на 100 метров, и Петя пришёл первым. Через 10 секунд после начала забега никто ещё не финишировал, и все его участники в сумме пробежали 288 метров. А когда Петя закончил бег, остальным четырём участникам оставалось пробежать до финиша в сумме 50 метров. Сколько метров пробежал Петя за 10 секунд? (Известно, что скорость каждого была постоянной на протяжении всей дистанции.)

49

3. В параллелограмме $ABCD$ сторона BC в 3 раза больше стороны AB . Биссектрисы углов DAB и ABC пересекают прямую CD в точках M и N соответственно. Найдите периметр параллелограмма $ABCD$, если $MN = 10$.

91

4. Приведённый квадратный трёхчлен $f(x)$ таков, что каждое из уравнений $f(x) = 2x - 5$ и $f(x) = 10 - 4x$ имеет ровно по одному решению. При каком наибольшем значении параметра a уравнение $f(x) = a$ также будет иметь ровно одно решение?

2

5. Даны два числа $x < y$. Оказалось, что $\sin(\pi x) + \cos(\pi y) = \frac{3\sqrt{2}}{5}$, $\cos(\pi x) - \sin(\pi y) = \frac{4\sqrt{2}}{5}$. Какое наименьшее значение может принимать величина $y - x$?

1

6. Известно, что

$$\frac{1}{x-y} + \frac{1}{y-z} + \frac{1}{z-x} = 2,5.$$

Какое наибольшее значение может принимать сумма

$$\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{(y-z)^2} + \frac{1}{(z-x)^2}?$$

6,25

7. У Миши есть пять банок с красками разного цвета. Сколькими различными способами он может покрасить забор, состоящий из 7 досок, так, чтобы любые две соседние доски были разных цветов и при этом он использовал краски не менее чем трёх цветов?

20460

8. При каком наибольшем значении параметра b существует такое α , что уравнение

$$x^2 + (2 \sin \alpha + 3 \cos \alpha)x + b = 0$$

имеет действительное решение?

3,25

9. В основании пирамиды $SABC$ лежит равнобедренный треугольник ABC ($AB^2 = BC^2 = 160$, $AC^2 = 320$). Сфера, проходящая через вершины A, B, C , делит ребра SA и SC пополам и пересекает ребро SB в точке B_1 . Найдите радиус сферы, если $SB_1 = 9$, $BB_1 = 1$. В ответ запишите квадрат радиуса сферы.

95,3125

10. Пусть $f(x) = ax^2 + bx + 2$, $a < 0$ и $f(8) = 0$. Какое наибольшее количество целочисленных решений может иметь неравенство $ax^4 + bx^2 + 2 > 0$?

5

11. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребрами $AD = 5$, $AB = 16$, $AA_1 = 16$. Точки M и N — середины ребер $A_1 B_1$ и $C_1 D_1$. Точки E и F выбраны на ребрах CC_1 и DD_1 так, что $C_1 E = 3$, $D_1 F = 11$. Какую наименьшую длину может иметь ломаная APQ , где точка P лежит на прямой MN , а точка Q лежит на прямой EF ? В ответ запишите квадрат длины ломаной.

608,2

12. Сколькими способами можно разменять 120 000 рублей монетами в 1, 2 и 5 рублей?

720048001