

Олимпиада «Физтех» по математике

10 класс, онлайн-этап, 2014/15 год

1. Какую наименьшую сумму могут иметь девять последовательных натуральных чисел, если эта сумма оканчивается на 1234567?

81234567

2. Петя и четыре его одноклассника стартовали одновременно в забеге на 100 метров, и Петя пришёл первым. Через 10 секунд после начала забега никто ещё не финишировал, и все его участники в сумме пробежали 288 метров. А когда Петя закончил бег, остальным четырём участникам оставалось пробежать до финиша в сумме 50 метров. Сколько метров пробежал Петя за 10 секунд? (Известно, что скорость каждого была постоянной на протяжении всей дистанции.)

64

3. В параллелограмме $ABCD$ сторона BC в 3 раза больше стороны AB . Биссектрисы углов DAB и ABC пересекают прямую CD в точках M и N соответственно. Найдите периметр параллелограмма $ABCD$, если $MN = 10$.

16

4. Вася выписал на доску в строку 1200 букв, причем количество букв, написанное между любыми двумя гласными буквами, не равно 12. Какое наибольшее количество гласных букв могло быть выписано?

602

5. Приведённый квадратный трёхчлен $f(x)$ таков, что каждое из уравнений $f(x) = 2x - 5$ и $f(x) = 10 - 4x$ имеет ровно по одному решению. При каком наибольшем значении параметра a уравнение $f(x) = a$ также будет иметь ровно одно решение?

2

6. Даны два числа $x < y$. Оказалось, что $\sin(\pi x) + \sin(\pi y) = \frac{4\sqrt{2}}{5}$, $\cos(\pi x) + \cos(\pi y) = \frac{3\sqrt{2}}{5}$. Какое наименьшее значение может принимать величина $y - x$?

5,0

7. Даны равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) с углом $ACB = 41^\circ$ и точка M такая, что отрезки AM и BC пересекаются, а $\angle AMB = 15^\circ$, $\angle AMC = 49^\circ$. Найдите $\angle MAC$.

26

8. Известно, что

$$\frac{1}{x-y} + \frac{1}{y-z} + \frac{1}{z-x} = 1,5.$$

Какое наибольшее значение может принимать сумма

$$\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{(y-z)^2} + \frac{1}{(z-x)^2}?$$

2,25

9. Пусть $f(x) = ax^2 + bx + 2$, $a < 0$ и $f(10) = 0$. Какое наибольшее количество целочисленных решений может иметь неравенство $ax^4 + bx^2 + 2 > 0$?

2

10. Окружность, диаметром которой является боковая сторона AB прямоугольной трапеции $ABCD$, касается боковой стороны CD в точке K . Диагонали трапеции пересекаются в точке L . Найдите длину отрезка KL , если длины оснований трапеции равны 3 и 5.

1,875

11. Рассмотрим последовательность натуральных чисел, построенную по следующему правилу: $x_1 = 14$, $x_2 = 20$, а x_{n+1} — наименьшее составное число, которое больше, чем $2x_n - x_{n-1}$. Найдите x_{30001} .

450165014

12. Сколькими способами можно разменять 110 000 рублей монетами в 1, 2 и 5 рублей?

605044001