

## Открытая олимпиада Физтех-лицея 2015

## Математика, 8 класс

1. На прямой  $a$ , касающейся данной окружности, выбрана произвольная точка  $P$ . Перпендикуляр к прямой  $a$ , проведённый в точке  $P$ , пересекает окружность в точках  $X$  и  $Y$ . Известно, что  $PX = 1$  и  $PY = 7$ . Найдите радиус данной окружности.

4

2. Сколько существует чётных натуральных чисел, меньших 100000, у которых количество цифр чётно?

4545

3. Сколькими способами можно выбрать из 12 человек группу для участия в эксперименте, состоящую из по крайней мере одного человека (в группе может быть любое число человек от 1 до 12)?

4095

4. Дана равнобедренная трапеция  $ABCD$  с основаниями  $BC = 28$  и  $AD = 42$ . Через точку  $C$  проведена прямая, перпендикулярная  $AD$  и пересекающая отрезок  $AD$  в точке  $P$ . Найдите  $DP$ .

7

5. В тюрьме 200 камер, пронумерованных натуральными числами от 1 до 200. Безумный надзиратель за ночь совершает 200 обходов следующим образом: в первый обход он открывает все камеры, во второй — закрывает каждую вторую, в третий — поворачивает ключ в замке каждой третьей камеры, открывая её, если она была закрыта и закрывая, если была открыта. Действуя аналогично, он заканчивает 200 обходом, поворачивая ключ в каждой 200 камере. Сколько камер осталось открытыми после завершения им всех обходов?

14

6. Пусть  $a$  и  $b$  — действительные числа, удовлетворяющие уравнениям  $a^4 + a^2b^2 + b^4 = 616$ ,  $a^2 + ab + b^2 = 28$ . Найдите значение  $2ab$ .

9

7. Найдите число таких пар  $(x, y)$ , что  $x, y \in \mathbb{N}$ ,  $x < y \leq 1200$  и  $\text{НОД}(y^2 - x^2, y^3 - x^3) = 1$ .

6611

8. Дан прямоугольный треугольник  $ABC$  с прямым углом  $C$ . На катетах  $AC$  и  $CB$  построили квадраты  $ACDE$  и  $CBGF$ . Известно, что расстояние от точек  $G$  и  $E$  до прямой  $AB$  равны 8 и 10 соответственно. Найдите  $AB$ .

81

9. Дан равнобедренный прямоугольный треугольник  $ABC$  с гипотенузой  $AC$ . На гипотенузе  $AC$  выбраны точки  $K$  и  $L$ , а на сторонах  $AB$  и  $BC$  выбраны точки  $N$  и  $M$  соответственно так, что четырёхугольник  $KLMN$  является квадратом. Известно, что  $AC = 21$ . Найдите сторону квадрата.

7

10. Натуральные числа  $x, y, z$ , меньшие 100, удовлетворяют уравнениям

$$1099x + 901y + 1110z = 58103, \quad 109x + 991y + 101z = 11956.$$

Найдите  $10000x + 100y + z$ .

340713

11. Пусть  $a_n$  — остаток от деления  $(n + 1)^3$  на  $n^3$ . Найдите остаток при делении числа

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{3003}$$

на 3000.

81

12. В понедельник в школьную библиотеку пришло 8 учеников, во вторник — 4, в среду — 6, в четверг — 2, в пятницу — 5. Никто из учеников не был в библиотеке два дня подряд. Какое наименьшее количество учеников побывало в библиотеке с понедельника по пятницу?

12

13. Есть колода карточек, пронумерованных от 1 до 2008. Эту колоду перемешали и теперь играют в игру. Каждый шаг этой игры состоит из двух действий:

- 1) верхнюю карту кладём вниз колоды;
- 2) ту карту, которая после первого действия стала верхней, перекладываем вниз другой колоды (изначально другая колода пустая).

Оказалось, что после игры карты во второй колоде расположились следующем порядке: 1, 2, 3, 4, ..., 2008. Какая карта лежала сверху первой колоды в самом начале?

8881

14. Дана последовательность целых чисел  $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{25}$ . Пусть  $b_n = m$ , если  $a_m$  — первый член последовательности, который больше или равен  $n$ . Известно, что  $a_{25} = 56$ . Какое наибольшее значение принимает число  $a_1 + \dots + a_{25} + b_1 + \dots + b_{56}$ ?

9571

15. Найдите остаток при делении числа

$$\frac{2^{2007} - 2}{2^2 - 1} + \frac{3^{2007} - 3}{3^2 - 1} + \dots + \frac{53^{2007} - 53}{53^2 - 1}$$

на 1431.

428

16. В каждую клетку таблицы  $9 \times 9$  ставят 0 или 1. Сколькими способами это можно сделать так, чтобы сумма чисел в каждой строке и каждом столбце была чётной?

18446744073709551616

17. Число  $N$  равно произведению 2014 простых чисел (не обязательно различных). Если каждый множитель в этом представлении увеличить на единицу, то полученное произведение будет делиться на  $N$ . Сколько различных таких натуральных  $N$  существует?

938

18. В стране 200 городов, но между ними нет дорог. Король приказал построить несколько новых дорог между некоторыми парами городов так, что если два города не связаны новой дорогой, то из одного города в другой можно добраться по крайней мере двумя разными маршрутами по новым дорогам, дополнительно проезжая ровно через один город. Какое наименьшее количество дорог может быть построено?

968

19. Дан правильный 180-угольник  $A_1A_2 \dots A_{180}$ . На его соседних сторонах  $A_{180}A_1$  и  $A_1A_2$  выбраны точки  $X$  и  $Y$  соответственно. Оказалось, что  $A_{180}X = A_1Y = 4$  и  $XA_1 = YA_2 = 3$ . Найдите сумму углов, под которыми виден отрезок  $XY$  из всех вершин данного 180-угольника, за исключением вершины  $A_1$ , т. е. сумму  $\angle XA_2Y + \angle XA_3Y + \dots + \angle XA_{180}Y$ .

871

20. Пусть про числа  $a_1, a_2, \dots, a_{200}$  известно, что

$$0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{200}, \quad a_1 + a_2 + \dots + a_{198} \leq 50, \quad a_{199} + a_{200} \leq 50.$$

Укажите наибольшее значение  $a_{199}$  при наибольшем значении  $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{200}^2$ .

28