

# Олимпиада им. Леонарда Эйлера

## Региональный этап, 2014/15 год

### Первый день

1. На доске написаны четыре числа, ни одно из которых не равно 0. Если каждое из них умножить на сумму трёх остальных, получатся четыре одинаковых результата. Докажите, что квадраты записанных на доске чисел равны.

2. Разрешается вырезать из шахматной доски размером  $20 \times 20$  любые 18 клеток, а потом выставить на оставшиеся клетки несколько ладей, не бьющих друг друга. Какое наибольшее число ладей можно выставить таким образом? Ладьи бьют друг друга, если они стоят на одной горизонтали или вертикали доски и между ними нет вырезанных клеток.

88

3. Делитель натурального числа называется *собственным*, если он меньше этого числа, но больше 1. У натурального числа  $n$  нашли все собственные делители (их оказалось не меньше трёх) и записали всевозможные их попарные суммы (повторно одинаковые суммы не записывали). Докажите, что полученный набор не мог оказаться набором всех собственных делителей никакого натурального числа.

4. Серединные перпендикуляры к сторонам  $AB$  и  $BC$  выпуклого четырёхугольника  $ABCD$  пересекают стороны  $CD$  и  $DA$  в точках  $P$  и  $Q$  соответственно. Оказалось, что  $\angle APB = \angle BQC$ . Внутри четырёхугольника выбрана точка  $X$  такая, что  $QX \parallel AB$  и  $PX \parallel BC$ . Докажите, что прямая  $BX$  делит диагональ  $AC$  пополам.

## Второй день

5. На столе лежит палочка длиной 10 см. Петя ломает её на две части и кладёт обе получившиеся палочки на стол. С одной из лежащих на столе палочек Вася проделывает ту же операцию, потом то же делает Петя и т. д. по очереди. Петя хочет, чтобы после 18 разломов все получившиеся палочки были короче 1 см. Вася хочет помешать Пете. Кто из них имеет возможность добиться своей цели независимо от действий соперника?

Вася

6. После просмотра фильма зрители по очереди оценивали фильм целым числом баллов от 0 до 10. В каждый момент времени рейтинг фильма вычислялся как сумма всех выставленных оценок, делённая на их количество. В некоторый момент времени  $T$  рейтинг оказался целым числом, а затем с каждым новым проголосовавшим зрителем он уменьшался на единицу. Какое наибольшее количество зрителей могло проголосовать после момента  $T$ ?

5

7. В трапеции  $ABCD$ , где  $AD \parallel BC$ , угол  $B$  равен сумме углов  $A$  и  $D$ . На продолжении отрезка  $CD$  за вершину  $D$  отложен отрезок  $DK = BC$ . Докажите, что  $AK = BK$ .

8. На шахматной доске размером  $20 \times 20$  расставлены 220 коней, которые бьют все свободные клетки. Докажите, что можно убрать 20 коней таким образом, чтобы оставшиеся кони били все свободные клетки. Напомним, что конь бьёт буквой «Г» (см. рисунок).

